UNIVERSIDAD DE CUENCA

Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación

Carrera de Matemáticas y Física

"Estrategias metodológicas y recursos aplicados a las líneas y gráficas de las funciones trigonométricas para los docentes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca"

Trabajo de titulación previo a la obtención del título de Licenciada en Ciencias de la Educación en Matemáticas y Física

Autoras:

Guamán Coraisaca Jenny Carmen
C.I. 0107339889
Malán Saravia Ximena Aracely
C.I. 0604884577

Tutor:

Ing. Francisco Xavier González Romo
C.I. 0104261458

Cuenca – Ecuador
02/08/2019

RESUMEN

El presente trabajo de titulación tiene como objetivo aportar a la mejora del proceso de enseñanza de la asignatura Trigonometría Plana y Esférica, de manera específica en la unidad de líneas y gráficas de las funciones trigonométricas, en los estudiantes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca. Para lo cual, se propone estrategias metodológicas que sirvan como una herramienta de apoyo y guía al docente y la elaboración de material didáctico para que el alumno pueda lograr un aprendizaje significativo.

Para la fundamentación teórica de la propuesta se realizó un estudio bibliográfico basado en lineamientos constructivistas. Asimismo, por medio de la aplicación de encuestas a los estudiantes y entrevista a dos docentes de la carrera se analizaron los datos obtenidos, donde dicha información evidenció la existencia de ciertas falencias en la enseñanza y el grado de dificultad en el aprendizaje de dicha unidad.

Por consiguiente se propone estrategias didácticas para docentes, mediante un aprendizaje guiado y significativo; con la elaboración del material concreto para la construcción de las líneas trigonométricas, funciones seno, coseno y tangente, que pretende mejorar la comprensión de los estudiantes mediante la combinación de teoría y práctica.

PALABRAS CLAVES: Estrategias metodológicas. Constructivismo. Proceso de enseñanza. Gráficas de funciones trigonométricas.

ABSTRACT

The present degree work has as an aim to contribute to the improvement of the process of education of the subject Flat and Spherical Trigonometry, specifically in the unit related to Lines and Graphs of Trigonometrical Functions, for the students of the career of Mathematics and Physics of the University of Cuenca, whereupon, it has proposed methodological strategies that serve as support and guide tool for the teacher, along with the production of didactic material for allowing the pupil achieves a significant learning.

For the theoretical foundation of this academic proposal, it has realized a bibliographical study based on the theory of Constructivism. Likewise, through the application of surveys to the students and an interview to two teachers of the career, the obtained data has been analyzed; whose information demonstrated the existence of certain failings in the teaching and the degree of difficulty in the learning of the mentioned unit.

Consequently, some didactic strategies were proposed for teachers by means of a guided and significant learning; with the elaboration of the concrete material for the construction of the trigonometrical lines; sine, cosine and tangent functions; that pretends to improve the comprehension of the students through the combination of theory and practice.

KEY WORDS: Methodological strategies. Theory of constructivism. Process of teaching. Trigonometrical functions graphs.

Contenido

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Jenny Carmen Guamán Coraisaca, en calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "**Estrategias metodológicas y recursos aplicados a las líneas y gráficas de las funciones trigonométricas para los docentes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca**", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 02 de agosto de 2019

Jenny Guamán

Jenny Carmen Guamán Coraisaca

C.I: 010733988- 9

Cláusula de Propiedad Intelectual

Jenny Carmen Guamán Coraisaca, autora del trabajo de titulación **"Estrategias metodológicas y recursos aplicados a las líneas y gráficas de las funciones trigonométricas para los docentes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca"**, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.

Cuenca, 02 de agosto de 2019

Jenny Guamán

Jenny Carmen Guamán Coraisaca

C.I: 010733988- 9

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio Institucional

Ximena Aracely Malán Saravia, en calidad de autora y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación "**Estrategias metodológicas y recursos aplicados a las líneas y gráficas de las funciones trigonométricas para los docentes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca**", de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 02 de agosto de 2019

Ximena Aracely Malán Saravia

C.I: 060488457- 7

Cláusula de Propiedad Intelectual

Ximena Aracely Malán Saravia, autora del trabajo de titulación **"Estrategias metodológicas y recursos aplicados a las líneas y gráficas de las funciones trigonométricas para los docentes de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca"**, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autora.

Cuenca, 02 de agosto de 2019

Ximena Aracely Malán Saravia

C.I: 060488457-7

DEDICATORIA

El presente trabajo se lo dedico a Dios por regalarme sabiduría y guiarme en el camino correcto, a mi familia, pues siempre me demostraron un apoyo incondicional, a mi mamá por confiar en mí, por ser un ejemplo de perseverancia y dedicación, porque cuando empezaba a decaer, me alentaba para seguir adelante. A mis hermanos por brindarme su respaldo y de manera especial a mi hermana Johanna por ayudarme con el cuidado de mi hijo Jeremy, quien ha sido mi fortaleza, todos ustedes son quienes me han permitido alcanzar mi meta de ser una profesional.

Jenny Guamán

DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico en primer lugar a mi Dios, por estar siempre guiando mis pasos y haber puesto todas las pruebas apropiadas a lo largo de mi vida. Te agradezco por todas aquellas personas que de una u otra manera siempre me brindaron su apoyo, sé que tú las pusiste en mi camino gracias Padre.

A mis hijos Karen y Cristhoper por entenderme, comprenderme, acompañarme y haberme tenido mucha paciencia en este arduo camino que les ha tocado vivir junto a mí, gracias amores de mi vida.

A mi mami porque sin el apoyo de ella no hubiera podido llegar a cosechar esta meta, gracias por estar siempre soportándome, por ser incondicional eres una gran persona no cambies sigue siendo esa luchadora que me ha enseñado a no dejarse vencer por las adversidades de la vida.

A Mario, gracias por haber estado brindándome todo el apoyo moral durante todo este camino, quizás perdí un compañero sentimental, pero no me arrepiento ya que en todo este tiempo he ganado un gran amigo que sé que siempre estará ahí cuando lo necesite.

A mi abuelita, María Elena gracias por haberme educado como hija, por prepararme para esta vida, y enseñarme que la bondad y la humildad vale más que todo en este mundo, mamita el amor y gratitud que te tengo es inmenso que no se compara con nada.

Ximena Malán

AGRADECIMIENTO

Expresamos nuestra gratitud a Dios por sus infinitas bendiciones, y que pese a las dificultades que se han presentado a lo largo de nuestra trayectoria académica, nos ayudó a seguir adelante y a no desfallecer.

Damos gracias a nuestras familias, por ser el pilar fundamental en nuestras vidas y por contribuir en nuestro proceso de formación profesional.

Agradecemos al Ing. Xavier González, por guiarnos en la elaboración del presente trabajo de titulación y de manera muy especial a la Lcda. Sonia Guzñay por ayudarnos en todo momento sin poner limitante.

Ximena y Jenny

INTRODUCCIÓN

Dentro del estudio de la matemática, existen muchas ramas, las cuales presentan un alto grado de complejidad durante su proceso de asimilación y comprensión. Una de ellas es la materia de Trigonometría Plana y Esférica, la cual requiere un alto nivel de conocimiento de cada uno de los temas que la conforman, debido a que estos son necesarios para el estudio de futuros contenidos, así como es el caso de líneas y gráficas de funciones trigonométricas.

Además, un docente de la materia de Trigonometría Plana y Esférica manifestó que la enseñanza de líneas y gráficas de las funciones trigonométricas en el pizarrón resulta demorada y no garantiza que los alumnos alcancen un aprendizaje significativo, sino más bien conlleva al educando a ser un ente pasivo y superficial dentro del proceso educativo, a más de que dificulta la asimilación de temas posteriores de la materia.

Por tal razón, se buscaron dos elementos, que sirvan como una herramienta de apoyo al docente. En primer lugar se propone investigar y seleccionar algunas estrategias metodológicas que estarán planificadas en la guía didáctica con el fin de que se utilice como directriz durante el proceso de enseñanza. En segundo lugar, se elaboraron recursos didácticos, que expliquen cómo graficar las funciones trigonométricas sin necesidad de usar ninguna tabla de valores numéricos, por lo que, se pretende asociar algunos temas con aplicaciones en situaciones de la vida real. Los resultados que se esperan obtener con la elaboración del mencionado material en cada clase son: estudiantes motivados, participativos y constructores de su propio conocimiento.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.1. ABSTRACCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

La matemática es una ciencia exacta que aportado significativamente al avance de la sociedad con nuevos descubrimientos, en especial a lo que a tecnología se refiere. Dicha ciencia está compuesta por diferentes disciplinas, una de las cuales es la Trigonometría Plana y Esférica la que presenta un alto nivel de complejidad, debido a que su contenido requiere de estructuras y subestructuras.

> Gómez (2002) citado por (Valderrama, 2013) expresa que: “todo contenido matemático objeto de enseñanza se encuentra bajo una estructura matemática específica, para el cual el periodo de tiempo para la instrucción es limitado y la especificad del mismo permite profundizar a través de sus diferentes significados y representaciones”. (p. 21)

Por lo expuesto por Gómez, el contenido de la matemática a ser estudiada debe estar acorde a las necesidades que se espera superar, por lo que tendrá una estructura acorde a los objetivos y destrezas que se espera desarrollar en clase. Asimismo, se debe tener presente el tiempo que se dispone para desarrollar la clase, por tanto, el docente se ve en la obligación de buscar herramientas que le permitan profundizar el tema de forma clara, sencilla y eficaz.

> Según la UNESCO (2004) citado por (Valderrama, 2013) expresa que: Hoy por hoy el aprendizaje es entendido como: i) un proceso natural en el que se reconoce que el cerebro aprende naturalmente y no todos aprenden de la misma manera; ii) un proceso social en el que se reconocen herramientas que apoyan el aprendizaje colaborativo; iii) un proceso activo, no pasivo ya que los individuos se enfrentan al desafío de producir conocimiento y no simplemente reproducirlo…..(p. 13)

Por lo citado por Valderrama, la asimilación de contenidos por parte del educando es diverso, dado que cada estudiante aprende de manera distinta, asimismo ratifica la importancia que tiene el aprendizaje individual, colaborativo dentro del proceso de enseñanza, por ende también enfatiza en cómo el estudiante se convierte en el protagonista de su saber, al transformarse en un ente activo, dado que el docente genera desequilibrios que ayuden a entender al educando por qué y para qué sirve el nuevo conocimiento adquirido.

Además, a todos estos factores se suman unos mencionados por Valderama, N. (2013) quien respecto a las dificultades que se presentan en los estudiantes en cuanto al proceso de enseñanza de funciones trigonométricas se refiere, expresa que:

> Se dificulta el manejo gráfico de ángulos y establecer relación entre los dos sistemas de medición sexagesimal y cíclica con su respectiva representación gráfica. Identificar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo con respecto a uno de los ángulos agudos. Determinar los valores de las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo construido en un círculo unitario sobre un sistema de coordenadas. Construir adecuadamente las funciones trigonométricas estableciendo regularidades para los valores desde la construcción geométrica en el círculo unitario teniendo en cuenta las características y propiedades de los ángulos. Establecer las características (dominio, rango, periodo, amplitud) de cada función trigonométrica, a partir de regularidades obtenidas en la construcción de esta. Realizar transformaciones entre las diferentes representaciones de las funciones. (p. 63)

Por tal razón, dentro del estudio de las líneas y gráficas trigonométricas se requiere de una amplia gama de conceptos, debido a que está compuesta de subestructuras involucradas al tema de estudio, por esta razón dentro de sus componentes deben existir relaciones conceptuales que faciliten el proceso de comprensión entre los contenidos y subcontenidos que la conforman.

Por lo que, el estudiante debe conocer qué factores matemáticos intervienen en el estudio de las líneas y gráficas trigonométricas y de esta manera encontrar las falencias existentes para conseguir un mejor entendimiento de las mismas. Dentro de las posibles causas detectadas están las siguientes:

- Falta de dominio de las razones trigonométricas, es decir, reconocimiento de los ángulos que forman el triángulo rectángulo, al no ser utilizados adecuadamente para obtener los valores de las funciones seno, coseno y tangente. Lo cual se debe a la falta de reconocimiento del cateto adyacente, cateto opuesto y la hipotenusa con respecto a un ángulo establecido, no establecer una relación entre el cateto adyacente y opuesto con el valor de la función.
- Además, el no reconocer los signos de las funciones trigonométricas según el cuadrante en el que se encuentre el lado final del ángulo. No establecer la construcción geométrica en el círculo trigonométrico al sistema de coordenadas, entre otros aspectos…

Por otra parte, un punto relevante que no es tratado en el proceso de enseñanza es el no tener presente el número mínimo y máximo de estudiantes en el aula, dado que la impartición de la clase puede ser factible para un número determinado, es decir, tendrá que ser considerada aquella variable.

1.2. CORRIENTES PEDAGÓGICAS. CONSTRUCTIVISMO

La historia del ser humano a lo largo del tiempo lo ha llevado a la adquisición de nuevos saberes, surgiendo así la necesidad de conocer cómo se forma el conocimiento; por tal razón se han generado diversas hipótesis acerca de cómo ocurre el aprendizaje y qué factores influyen en éste. A partir de tales supuestos se originaron diferentes corrientes pedagógicas, que han evolucionado y se han desarrollado cada vez más, pero, ¿qué es una corriente contemporánea? Estas son consideradas por Trilla, Rué, Puig, Hernández, Contreras & Carbonell (1996) como: "Los campos, corrientes, discursos... que expresan, a nuestro entender, líneas de fuerza en el pensamiento y/o en la práctica educativa" (p. 10). Es así que dichas teorías son fundamentales, ya que aportan en gran medida a la mejora continua de la labor docente.

La formación del conocimiento ha sido analizada desde diversas perspectivas, sin embargo, en la actualidad se ha dado énfasis a cómo se construye, prestando menos atención a cómo es adquirido. Por consiguiente, en este trabajo pretende realizar un resumen del enfoque constructivista, debido a que mencionada teoría tiene presente la importancia del entorno y la participación activa del educando en el proceso de enseñanza–aprendizaje. La corriente constructivista, fue establecida en proposiciones de Piaget, pero fueron Ausubel y Vygotsky, quienes en los últimos años tuvieron mayor impacto en el ámbito educativo contemporáneo.

Es así que, la teoría constructivista expresa que el ser humano es quien crea su propio aprendizaje, es decir, que el conocimiento no se puede imponer, sino que más bien, se forma de diferentes maneras en la mente de cada persona, a través de mecanismos cognitivos que son los que facilitan el entendimiento del educando, el cual será adquirido al interactuar con la realidad, al experimentar con objetos y situaciones que ayudan al estudiante a transformar las actividades realizadas en aprendizajes, y estos a su vez pueden ser empleados a lo largo de su vida.

Sin lugar a duda, desde la perspectiva constructivista, el proceso de aprendizaje es muy importante, pero, ¿cómo ocurre dicho proceso? Según Piaget, el educando construye su conocimiento a través de un proceso interno, activo e individual por medio de desequilibrios cognitivos; es así que tales construcciones epistémicas son significativas para el alumno. Por lo que, se considera necesario analizar el aprendizaje significativo de Ausubel:

> Ausubel & Moreira (1976, 2002 & 1997) (citado por Rodríguez, 2004) piensan que el aprendizaje significativo es el proceso según el cual se relaciona un nuevo conocimiento o información con la estructura cognitiva del que aprende de forma no arbitraria y sustantiva o no literal. Esa interacción con la estructura cognitiva no se produce considerándola como un todo, sino con

aspectos relevantes presentes en la misma, que reciben el nombre de subsumidores o ideas de anclaje. (p.2)

La teoría de Ausubel enfatiza la importancia que tiene el trabajar a partir de lo que el alumno ya conoce, debido a que es más fácil que relacione el nuevo conocimiento con los saberes previos, por lo que, en este trabajo se ha pretendido averiguar e investigar los intereses actuales del educando y asociarlo con aplicaciones prácticas para enseñar de acuerdo a dicha teoría.

Asimismo, Ausubel definió tres condiciones básicas para que se produzca el aprendizaje significativo. La primera expresa que los materiales de enseñanza deben tener una secuencia lógica, partiendo desde lo general a lo particular y los recursos a ser empleados deben estar bien estructurados y acordes al orden planteado. También se debe respetar la estructura psicológica del educando, es decir, respetar su forma y ritmo de aprendizaje. Por tanto, no se debe pasar por alto el papel fundamental que cumple la motivación dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, debido a que un estudiante motivado atenderá y aprenderá de forma más rápida y eficaz. Lo que conlleva a saber ¿Cuáles son las características relevantes que permiten conocer por qué se debe aprender de manera significativa y cómo dicho aprendizaje facilita la labor docente en el aula? Una cualidad, entre las que se mencionan es la interacción que debe haber entre los nuevos conocimientos receptados por el educando y los conocimientos almacenados previamente en su memoria, los cuales se asocian con el aprendizaje por descubrimiento en los niños de básica elemental; así también con el aprendizaje por recepción, que es empleado en niños de la básica superior, debido a que debe existir una madurez cognitiva, por lo que se puede decir que dichas condiciones facilitan el proceso de recepción y comprensión.

El material que se utilice al impartir la clase debe ser significativo y de acuerdo a lo que el alumno ya conoce para potencializar dicho aprendizaje y que tenga un significado lógico.

Además, el educando debe tener antecedentes o ideas previas sobre el tema a tratarse y una vez reforzado el saber nuevo se puede hablar entonces de significado psicológico, puesto que el aprendizaje se convierte en un nuevo contenido de cognición para el estudiante. Los tipos de aprendizaje significativos (de representación, de conceptos y de proposiciones) ayudan a que el trabajo docente esté acorde a las situaciones de aprendizaje que se desee lograr y el dominio de los mismos por parte del educador sirvan para que el nuevo aprendizaje sea almacenado en la memoria a largo plazo y el educando lo utilice cuando lo crea necesario.

Por lo expuesto previamente, no se puede descartar el rol del docente, debido a que ayuda a que la comprensión de los temas estudiados se profundice; así también motiva a que los estudiantes investiguen y descubran más información. Es así que, se considera sustancial señalar que el actual sistema educativo ecuatoriano busca que el proceso de enseñanza–aprendizaje sea constructivista, pero no es fácil lograrlo, puesto que seguimos dentro de una educación tradicional, donde los estudiantes están acostumbrados a que sea el docente quien facilite la información y el rol del alumno sea pasivo, es decir, que acepten lo que se les dice y no pongan en tela de duda lo impartido.

En síntesis, durante los últimos años se han desarrollado diferentes teorías del aprendizaje y una de ellas es la teoría constructivista; partiendo del punto de vista de la misma, el estudiante debe construir su propio aprendizaje y así también, el docente es mediador y guía, además de incentivar a los alumnos a que sigan investigando para la construcción significativa de nuevos conocimientos, es decir, que el aprendizaje significativo planteado por Ausubel ha logrado aclarar cómo se desarrolla la significatividad en el educando, y conocer más de cerca el proceso que se ha de seguir para desarrollar un verdadero aprendizaje; por tales motivos se recomienda emplear una guía constructivista de los temas a ser estudiados, sin desagregarse de los resultados esperados durante el proceso de enseñanza-aprendizaje y tener presente que el enfoque sirva como una herramienta que ayude a mejorar la asimilación de los contenidos y a su vez esté acorde a los intereses de los estudiantes.

1.3. RECURSOS DIDÁCTICOS

El empleo de recursos didácticos en el ámbito educativo pretende mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, dado que a través de este medio se transmite información relevante que busca aportar a la calidad educativa y proporcionar ideas al educando acorde a su realidad y que a su vez le permitan ser un ente activo de su aprendizaje.

> Sánchez, M. (2013), expresa que: "Denominaremos medios y recursos didácticos a todos aquellos instrumentos que, por una parte, ayudan a los formadores en su tarea de enseñar y, por otra, facilitan a los alumnos el logro de los objetivos de aprendizaje". (p. 19)

Por lo expresado por Sánchez, se puede decir que los recursos didácticos son necesarios dentro del proceso de enseñanza, puesto que sirven como una herramienta de apoyo al docente y permiten que el tema se desarrolle acorde a los objetivos que se espera conseguir.

Además, los recursos didácticos pretenden estimular al educando en función de sus sentidos para que pueda acceder a la información fácilmente. Para que un recurso sea didáctico debe ser útil y funcional, y desde una perspectiva constructivista se debe ir construyendo entre las personas implicadas, y sobre todo los materiales educativos no buscan reemplazar la labor docente, sino al contrario ser un instrumento de apoyo que le ayude a mejorar el proceso educativo, teniendo claro que la experiencia asimilada por el educando es indirecta a la realidad y que es un canal mediador entre el docente y estudiante, el cual podría favorecer el logro de los objetivos de aprendizaje esperados.

Los medios educativos pueden ser utilizados en cualquier momento de la clase, por lo que el profesor deberá acompañar cada parte de la misma con actividades que sean del agrado del educando para integrar los conocimientos previos con las inquietudes que pueden surgir y desarrollar un conocimiento integral, el cual esté ligado a contextos reales, despertando la curiosidad y el interés por conocer con qué otras ramas se relaciona el tema tratado y de esta forma alcanzar los niveles óptimos de calidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.4. LA GUÍA DIDÁCTICA

La enseñanza ha cambiado con el pasar del tiempo, pues el profesor no solo se limita a la mera transmisión de conocimientos, sino que más bien ahora se convierte en guía y orientador del aprendizaje puesto que, organiza la clase, busca diferentes métodos y recursos para el buen desarrollo de la misma centrándose en el aprendizaje significativo del alumno, es decir, considerando sus saberes previos. Asimismo, busca que el discente desarrolle las destrezas, habilidades que puedan contribuir a su formación, no solo académica, sino también profesional.

El aprendizaje de las ciencias exactas (matemáticas) ha resultado en cierto modo complejo, por lo que conviene que el docente posea distintos instrumentos para optimizar el mismo; por tales razones en la actualidad las clases deben ser planificadas con anticipación, pues el docente no puede simplemente improvisar ya que esto podría dificultar el aprendizaje. Una excelente herramienta pedagógica para apoyar al docente es la guía didáctica, porque permite organizar la materia, establecer las metodologías más adecuadas, detallar una serie de actividades y orientar a los estudiantes en su aprendizaje; es así que se podría llegar a perfeccionar la actividad docente.

> En tal sentido, se considera necesario entender qué es una guía didáctica; Orden Hoz, A. (1967), piensa que: "La guía didáctica constituye un documento pedagógico de carácter orientador cuya función es facilitar la tarea del maestro en la planificación, ejecución y evaluación del trabajo docente y discente en cada una de las materias de enseñanza." (p. 24)

Es así que, la educación actual busca que los alumnos construyan su propio conocimiento, por lo que, la guía didáctica adquiere un papel esencial para la misma, porque se relaciona con las teorías constructivistas, siempre que se tenga en cuenta los saberes previos de los alumnos y se relacionen con los nuevos.

Por tanto se plantea una nueva relación docente-estudiante, diferente a la tradicional, en donde el docente es mediador y guía del proceso de aprendizaje del educando, con la necesidad de organizar el proceso de enseñanza, en la que el educador, por medio del empleo de guías didácticas, ofrece herramientas y medios para orientar a que el alumno por sí solo construya su aprendizaje.

Por lo expuesto anteriormente se debe enfatizar en su uso por la significación que adquiere para mejorar las labores profesor–estudiante y mejorar el proceso de enseñanza impartida por el docente; además, con el empleo del material apropiado se pretende alcanzar resultados que pudieron contribuir a la asimilación de los temas de cada clase, desarrolladas en este trabajo.

1.5. MÉTODOS, TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA

La enseñanza a lo largo del tiempo se ha modificado, pues antiguamente se limitaba tan sólo al uso de la pizarra y el marcador, conllevando a un aprendizaje memorístico, sin importar que el alumno alcance un verdadero aprendizaje, debido a dicha razón surgen aportes que ayuden a la mejora del proceso de enseñanza que buscan desarrollar en el estudiante un aprendizaje significativo, activo y sobre todo crítico, generando que expertos en pedagogía manifiesten y descubran métodos, técnicas y estrategias que faciliten el proceso de aprendizaje; por tanto se considera necesario definir los métodos de enseñanza:

> Método de enseñanza es el conjunto de momentos y técnicas lógicamente coordinados para dirigir el aprendizaje del alumno hacia determinados objetivos. El método es quien da sentido de unidad a todos los pasos de enseñanza y del aprendizaje, principalmente en lo que atañe a la presentación de la materia y a la elaboración de la misma. Se da el nombre de método didáctico al conjunto lógico y unitario de los procedimientos didácticos que tienden a dirigir el aprendizaje, incluyendo en él desde la presentación y elaboración de la materia hasta la verificación y competente

rectificación del aprendizaje. (Giuseppe, 1985, P. 364)

Por ello, los mencionados métodos sirven para que el proceso de enseñar-aprender sea el más adecuado, a causa de que relaciona una o varias disciplinas en el momento de impartir la clase, utilizando técnicas y estrategias pertinentes con el único fin de alcanzar los objetivos previos que el docente espera conseguir. Además se debe recalcar la importancia que tiene el asociar la teoría con varios tipos de aprendizaje, debido a que ayuda a optimizar la actividad educativa.

El empleo adecuado de un método sirve para que el educando despierte su capacidad de pensar y trabajar, evitando pérdida de tiempo y mal uso de recursos, por lo que el educador debe conocer la amplia gama de métodos que existen y adecuarlos a su asignatura. Asimismo, los métodos ayudan al docente optimizar la explicación de un tema, brindándole diferentes alternativas que pueden llevar a dinamizar sus clases.

Para entender de mejor manera los beneficios del uso de métodos y técnicas, primero se debería definir la palabra método; didácticamente significa, camino para alcanzar los objetivos estipulados en un plan de enseñanza, o camino para llegar a un fin determinado, y la técnica quiere decir cómo hacer algo. Por tanto, el método indica el camino y la técnica el cómo recorrerlo, es decir, la aplicación de diferentes métodos implica la utilización de varias técnicas y por ende los procesos deben emplearse acorde a los requerimientos educativos, características del grupo que aprende y los objetivos de aprendizaje. Las estrategias de enseñanza son necesarias y no deben considerarse tan solo como pasos a seguir, porque es aquí donde el docente debe demostrar su creatividad al emplearlas y además debe despertar la curiosidad en el desarrollo de las actividades para los estudiantes, como por ejemplo: la elaboración de mapas mentales, cuadros sinópticos y cuestionarios. Todas estas estrategias son flexibles y adaptativas en cualquier momento de la clase, por lo que el docente debe conocer los fundamentos teóricos y metodológicos propios de cada estrategia, para alcanzar destrezas requeridas como: crear, inventar, razonar y analizar situaciones que ayuden al estudiante a comprender los enunciados en la resolución de problemas y los contextualice según su realidad.

Aunado a esto, se considera que el método didáctico podría facilitar la enseñanza de líneas y gráficas trigonométricas.

> Morales, D. (2016). Referente a método didáctico expresa que: es el conjunto lógico de procedimientos didácticos que tienden a dirigir el aprendizaje hacia un objetivo, tema o contenido, ya sea exponer de manera lógica-secuencial un tema de estudio, resolver problemáticas mediante la investigación, trabajo en equipo, la colaboración, presentación de resultados. (p. 15).

Por lo manifestado por Morales, se puede decir que la finalidad de tal método es lograr el aprendizaje significativo, que se espera alcanzar mediante este trabajo de titulación.

Además, los métodos que utilice el docente deben contribuir a un aprendizaje basado en la vida cotidiana y tener presente que el acto educativo pueda relacionarse con una o varias disciplinas en el momento de impartir la clase, utilizando técnicas y estrategias pertinentes. Cabe mencionar que no importa la teoría que se relacione al método de enseñanza, sino más bien es preferible que se lo asocie con varios tipos de aprendizaje.

El correcto uso de los métodos, técnicas y estrategias sirve para que el proceso de enseñanza-aprendizaje se desarrolle en un ambiente adecuado, brindándole al educando la facilidad y orientación para conseguir las metas de aprendizaje planteadas por parte del profesor, si bien su adaptación en el aula de clase no siempre se proyecta con tanta simplicidad debido a factores como el tiempo establecido, conocimientos previos, número de alumnos. La utilización adecuada de los métodos retribuye a la educación con el fin de conseguir calidad y excelencia en la enseñanza, pues facilita el perfeccionamiento de destrezas en los estudiantes, tales como: el razonamiento, la lectura, la escritura, la investigación, el trabajo activo y colaborativo, entre otras, por lo que su influencia en el ámbito educativo se destaca ampliamente para que así se logre alcanzar los objetivos planteados previamente en la planificación y hacer lo posible por dejar atrás los temores de los alumnos al referirse a las matemáticas como una asignatura compleja, abstracta y difícil. Por tanto, el uso creativo de las mismas ayudará a que el estudiante se interese por aprenderlas y pueda analizar su aplicación en la vida real.

1.5.1. ESTRATEGIAS DE TRABAJO

1.5.1.1 LLUVIA DE IDEAS

La lluvia de ideas es empleada para buscar diferentes soluciones; en esta técnica no existe límite para exponer sus opiniones y, de llegarse a obtener una idea maravillosa, esta será producto del trabajo de todo el grupo en general y no solo de la persona que la haya expuesto.

Esta técnica tiene tres momentos: decir, podar y escoger. Para el primer momento no existe limitante de expresión; aquí se puede decir todo lo que se les ocurra, palabras, frases, ideas sin importar si estas puedan o no aportar al tema estudiado, por lo que, un estudiante designado previamente como secretario será el encargado de hacer una lista de las expresiones dichas. Para el segundo momento se selecciona las ideas que son relevantes y que podrían aportar al tema que se está tratando. Por último, se escoge la idea adecuada a los lineamientos que se requieren, pero antes de escoger dicha idea se debe tener presente los siguientes aspectos: las ideas a ser seleccionadas deben ser reales y flexibles para la práctica, asimismo han de ser positivas y aportar a la sintetización del tema a tratarse, en efecto, lo primordial es que todos han de quedar satisfechos con la idea, palabra o frase que se seleccione al final.

Esta estrategia es importante, ya que ayuda a despertar la confianza en el estudiante debido a que no existe límite para exponer las nociones que se tenga sobre el tema a tratarse, y ayuda a que el educando exprese y participe activamente durante el proceso de enseñanza.

1.5.1.2. CLASE INVERTIDA

La clase invertida requiere que el docente esté bien preparado y actualizado, asimismo proponga actividades interesantes que despierten el interés del estudiante. Además, el docente debe tener claro que tan solo será un guía y el estudiante el actor de su saber y su función será ser un mediador del aprendizaje. Por lo que, el material que se elige para las actividades (vídeos, documentos, audios, etc.), deberán ser adecuados y secuenciados con respecto a los objetivos que se espera alcanzar.

Otra estrategia que se puede desarrollar para la clase, es la elaboración de material que esté acorde a las actividades sugeridas, y que además se adapte a la finalidad de la clase. Sin olvidar que se debe asignar un tiempo prudente para resolver dudas o inquietudes que surjan en el aula.

Lo interesante de la clase invertida es que se relaciona con la taxonomía de Bloom, la que comprende seis aspectos importantes en el proceso de enseñanza, como es el conocimiento; que hace referencia a la capacidad que tenga el estudiante para recordar hechos específicos tratados, la comprensión por parte del estudiante sobre el aprendizaje que se desarrolla, es decir, el estudiante sabe lo que se le comunica y los emplea en los materiales presentados. Por otra parte la aplicación de dicha taxonomía tiene los mismos lineamientos que la comprensión, con la diferencia de que consta de diferentes elementos novedosos para realizar la tarea. Mientras que el análisis permite descomponer el todo y estudiarlos por partes y descubrir la relación existente entre ellos, la síntesis sirve para trabajar con partes y combinarlos en un todo. Para finalizar, la evaluación sirve para formular juicios sobre el valor que tiene el material presentado en clase; por todos estos aspectos la clase invertida estaría sobresaliendo y opacando a la forma tradicionalista de enseñar, la cual se practicó por décadas en la educación.

1.5.1.3. VÍDEO EDUCATIVO

El vídeo es una herramienta que puede ser utilizada para impartir una clase y a través de este medio se transmite información relevante que busca mejorar la calidad de la educación y no regirse únicamente a utilizar el libro de texto como único medio en el proceso educativo.

> Schmidt (citado por Bravo, 1992) afirma: en función de los objetivos didácticos que pueden alcanzarse con su empleo. Estos pueden ser instructivos, cuya misión es lograr que los alumnos dominen un determinado contenido; Cognoscitivos, si pretenden dar a conocer diferentes aspectos relacionados con el tema que están estudiando; Motivadores, para disponer positivamente al alumno hacia el desarrollo de una determinada tarea, Modelizadores, que presentan modelos a imitar o a seguir. (p. 1)

Por lo que al vídeo no hay que verlo como una herramienta para reforzar un tema, sino al contrario, saberlo utilizar como un medio que ayude al aprendiz a despertar el interés por el tema a tratarse, si bien es cierto el aprendizaje se desarrolla a través de la curiosidad del educando, el cual aparece al relacionar el tema con aspectos relevantes de la cotidianidad para lo cual se requiere de aprendizajes previos.

Hoy en día la tecnología facilita el empleo del vídeo educativo como un recurso didáctico que aportaría en gran medida a la construcción de niveles óptimos de calidad en los procesos de enseñanza-aprendizaje, dado que se aprovecha de una serie de elementos como imágenes, sonidos y palabras para transmitir experiencias que aporten a dicho proceso, permitiéndole la asimilación de un nuevo concepto de una forma clara y precisa, ya sea de manera individual o grupal.

1.6. GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS POR MEDIO DE RECURSOS DIDÁCTICOS

El empleo de medios educativos en una clase ayuda a que la recepción de los contenidos vaya acorde a las necesidades que surjan en el desarrollo de la misma. Mientras que, la falta de estos recursos puede llegar a obstaculizar que dicho proceso esté de acuerdo a los requerimientos que presente la clase, lo que dificulta el entendimiento del tema.

Por lo que, al seleccionar materiales didácticos se debe considerar dos puntos:

> Ogalde, I & Bardavid, E. (1992) expresa que: “en primer lugar, tal vez se deban formular dos preguntas básicas, como las siguientes: a) ¿Qué objetivos del aprendizaje se pretende lograr en la situación educativa donde se utilizarán estos materiales didácticos? b) ¿Qué etapa de los procesos de instrucción se desea reforzar con la incorporación de este material?... En segundo lugar, al seleccionar los materiales didácticos, es recomendable considerar los siguientes aspectos: la población, los recursos disponibles, el contexto y el tiempo disponible”. (p. 100)

Al respecto, en la utilización de estos medios al impartir un tema se tendrá en cuenta que un mismo material no puede servir como una herramienta bidireccional, dado que, cada instrumento es elaborado con una función específica. Además, el proceso de instrucción está constituido por diferentes etapas, las cuales deben definir la intencionalidad del material con respecto al tema, para evitar la unidireccionalidad del recurso. Del mismo modo, se debe tener presente a quiénes va dirigido el material, dado que la madurez cognitiva no es igual en todos los estudiantes; asimismo, cuestionarse sobre los recursos que se tiene y cómo estos aportan al proceso de enseñanza, sin olvidar que el contexto es muy importante, porque se tiene presente las necesidades que pueden presentarse en el aula de clase y por último el factor tiempo; el cual, facilita, complica o dificulta el proceso de enseñanza dependiendo del tema a tratarse.

Por los aspectos anteriormente mencionados se ha buscado emplear un tablero para la construcción de las gráficas seno, coseno y tangente, dado que al realizar un análisis bibliográfico se pudo evidenciar que en algunos textos de Trigonometría Plana y Esférica la explicación es compleja, lo que dificulta la comprensión en los estudiantes, es por esto que, se propone que el educando por medio de dicho tablero elabore las gráficas de las mencionadas funciones, mediante la manipulación de remaches y ligas sobre el círculo trigonométrico y el plano cartesiano. Las afirmaciones anteriores sugieren que luego de dicho proceso el estudiante realice un análisis de las características de cada una de las funciones construidas.

Por consiguiente, el empleo de recursos en las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente, deben ir acorde a los requerimientos de cada tema con el objetivo de mejorar el acto educativo, por lo que se debe enfatizar en la importancia que estos tienen dentro del proceso pedagógico, ya que ayudan al aprendiz a despertar la curiosidad e interés sobre dicho tema, lo que conlleva al estudiante a relacionar la materia con aspectos relevantes de su cotidianidad.

1.7. TIC´S EN LA EDUCACIÓN

En el tiempo actual, vivimos en una era científica, la cual facilita el empleo de TIC´S (Tecnologías de información y comunicación); estos son softwares que han aportado mucho a la educación, sobre todo con la tecnología actual que cambia constantemente, por lo que la educación no puede estar utilizando solo material didáctico, sino también ayudarse de diferentes medios, como son los programas o softwares educativos, que permiten a la educación desarrollarse acorde a las exigencias del medio, en vista de que las TIC´S son medios que ayudan a la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

> Ministerio de Ciencia y Tecnología (2001) (citado por Rodríguez, F., Jesús L., Martínez, N. & Lozada, J., 2009) piensa que “Las Tecnologías de Información y Comunicación se definen como un conjunto de herramientas e infraestructuras utilizadas para la recogida, almacenamiento, tratamiento, difusión, y transmisión de la información, pudiéndose distinguir tres tipos; terminales, redes y servidores” (p. 121).

Partiendo desde esta perspectiva se podría entender que las TIC´S son un medio factible para la transmisión de saberes en el ámbito educativo, dado que son softwares o herramientas que ayudan a que el proceso de enseñanza–aprendizaje se desarrolle en un ambiente cálido, permitiendo al estudiante ser el protagonista de su aprendizaje.

Por otra parte, la enseñanza de las matemáticas se ha realizado de manera tradicional debido a que consistía en un mero proceso de transmisión de contenidos, en el que el educando sólo recibía determinada información siendo un sujeto pasivo dentro del proceso de enseñanza, pero opuesta a tal aprendizaje; y de acuerdo al constructivismo es el educando quien debe formular conceptos a través de su interacción con los objetos y con los sujetos y, para conseguir tal aprendizaje, la educación actual demanda de nuevos métodos, técnicas y estrategias.

Es así como, el docente no puede ser indiferente a su contexto dado que se encuentra en constante evolución y debe conocer y poseer nuevas estrategias pedagógicas. Al respecto, una destreza innovadora es el uso de las TIC´S en la enseñanza de las matemáticas, pues el educador debe guiar a los educandos para que mediante dicho medio formen su conocimiento académico y no caigan en el mal uso de las mismas.

En efecto, el uso y aplicación de las Tics en el proceso educativo requiere de profesionales preparados, por lo que, el docente, dentro su práctica educativa, debe demostrar a los estudiantes que estas son un medio para que aprendan de mejor manera, pues existen programas que facilitan la comprensión de las matemáticas y les permitirán construir sus propios conocimientos ayudando a obtener un buen aprendizaje.

Por lo que, las TIC´S deberían ser vistas como un medio que apoya al proceso de aprendizaje y favoreciendo a la enseñanza y no debe ser entendido como un fin último. Aunado a esto, los docentes deberían capacitarse constantemente en el uso de los softwares educativos y, de ser el caso, complementarse con la teoría que vaya a impartir en su clase, y de este modo se pueda alcanzar o superar los objetivos que se espera en la asignatura.

CAPÍTULO II

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

2.1. METODOLOGÍA

El objetivo de esta investigación fue diagnosticar qué falencias presentó el proceso de enseñanza de las líneas y gráficas de las funciones trigonométricas. Para lo cual el trabajo se enfocó de manera cuantitativa y de este modo facilitar la recolección de datos, con el fin de corroborar el problema y para elaborar una propuesta acorde a las necesidades encontradas.

Por tal razón, se emplearon dos técnicas de investigación: la encuesta y la entrevista. En primer lugar, se realizó una serie de preguntas con opciones múltiples, que aportaron al objetivo planteado en este trabajo, posteriormente se procedió a aplicar la prueba piloto a los estudiantes enfocándose en el empleo de recursos didácticos y estrategias metodológicas en un par de preguntas, las cuales fueron cerradas, lo que facilitó su cuantificación. Además, en una, se buscó que los estudiantes categoricen el enfoque que predominó en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Finalmente, se aplicó la encuesta a la población.

En segundo lugar se realizó la entrevista a docentes de la carrera que han impartido la asignatura, donde se pudo obtener información precisa basadas en sus experiencias. Todas las preguntas de la entrevista fueron abiertas y se obtuvo información detallada y cualitativa por parte de los educadores, que corroboraron a la propuesta presentada.

2.1.1 ENCUESTA

En el desarrollo de la investigación se utilizó la técnica de la encuesta, para obtener información relevante que ayude a respaldar el problema previamente planteado dentro de la asignatura de Trigonometría Plana y Esférica, y de manera específica en el tema de líneas y gráficas trigonométricas.

La población considerada para la encuesta estuvo conformada por 76 estudiantes pertenecientes a segundo y cuarto ciclo de la carrera de Matemáticas y Física de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación en la Universidad de Cuenca que cursaron la asignatura de Trigonometría Plana y Esférica, dicha población fue seleccionada debido a que los conocimientos en esta materia son recientes y sus respuestas serían acertadas a la realidad que ellos percibieron al momento de recibir mencionado tema, lo que ayudaría a que los resultados tengan mayor precisión.

Para la recopilación de la información se empleó un cuestionario de nueve preguntas cerradas; las cuales estuvieron relacionadas a cómo se desarrolló el proceso de enseñanza, métodos y recursos que se emplearon para la impartición de la misma. Los resultados obtenidos se pueden visualizar a través de gráficas con los datos tabulados.

2.1.2. ENTREVISTA

Con el fin de confirmar el problema y validar la propuesta, se realizó una entrevista a docentes que impartieron la materia de Trigonometría Plana y Esférica, para conocer y comparar dos experiencias diferentes, las cuales aportaron al análisis de los factores que intervienen en el proceso de enseñanza desde el punto de vista del educador, algunos de ellos fueron: el limitante tiempo, número de alumnos, la finalidad que tenga el recurso didáctico a ser empleado y cómo influye la motivación dentro de dicho proceso. Todos estos aspectos se consideraron, puesto que dichas entrevistas evidenciaron diferentes resultados, los cuales fueron procesados por medio de una tabla comparativa, y de este modo a partir de la información obtenida elaborar las clases y así poder vencer dichas limitantes.

Para la recopilación de la información se empleó un cuestionario de ocho preguntas abiertas, con el fin de conocer cuáles fueron las dificultades que se presentaron, como también la importancia del empleo de una guía y recursos didácticos durante la enseñanza, y por ende realizar un cuadro comparativo de los resultados obtenidos, lo que ayudó a tener una idea de qué metodologías se pueden incorporar en la propuesta de este trabajo de titulación.

2.2. ANÁLISIS DE DATOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de la encuesta de forma estadística a través de gráficas. Aquella estaba estructurada de diez preguntas, siendo nueve cerradas con opciones de respuesta múltiple, la cual proporcionó aportes significativos para la elaboración de la guía didáctica.

1. **Para usted, la motivación en el proceso de enseñanza es:**

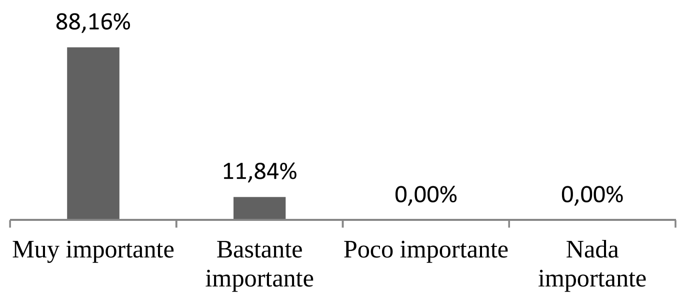


Figura1. Motivación en clases.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

El 100% de los estudiantes, por unanimidad consideran que la motivación es crucial para su proceso de aprendizaje, debido a que deben conocer la importancia de los contenidos ya que son aplicados en nuestra vida cotidiana y en la industria o rama de la técnica.

2. ¿El docente relacionó los contenidos del tema de líneas y gráficas trigonométricas con aplicaciones cotidianas?

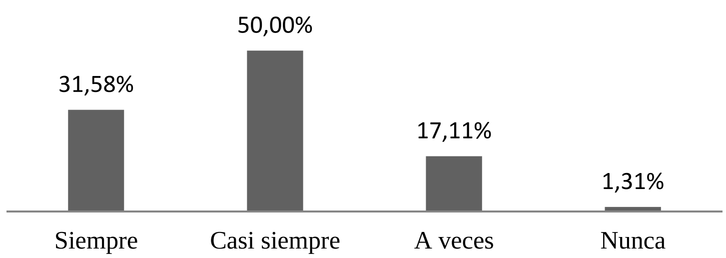


Figura 2. Contextualización de los contenidos.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

El 81,58 % de los estudiantes encuestados expresaron que el docente siempre relacionó los temas con situaciones cotidianas colaborando con el aprendizaje. Sin embargo el 18,42%

de ellos concluyeron que su docente nunca supo contextualizar el tema a estudiarse generando desinterés en la asignatura, por tanto bajas calificaciones.

3. **Cuando usted estudió los contenidos de líneas y gráficas trigonométricas, ¿cómo fueron impartidos?**

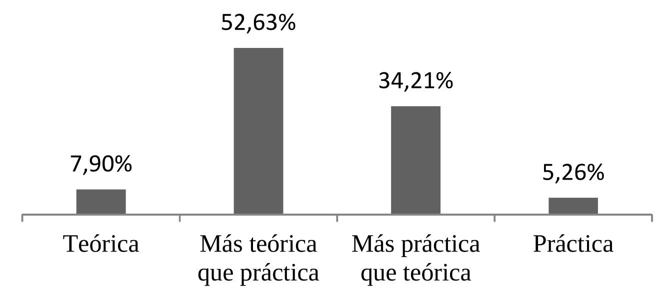


Figura 3. Explicacón de contenidos.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Al encuestar a los estudiantes y referirnos a cómo fueron impartidos los temas expresaron lo siguiente: el 60,53 % considera que fue teórica debido a que los recursos empleados por el docente fueron escasos o incluso inexistentes. Mientras que el 39.47% manifestó que la enseñanza del tema fue práctica, pero con sus limitaciones. Es decir que el componente fue incompleto quedando contenidos por reforzar.

4. **¿Cree usted que el uso de diferentes metodologías mejoraría su comprensión sobre la materia de líneas y gráficas trigonométricas?**

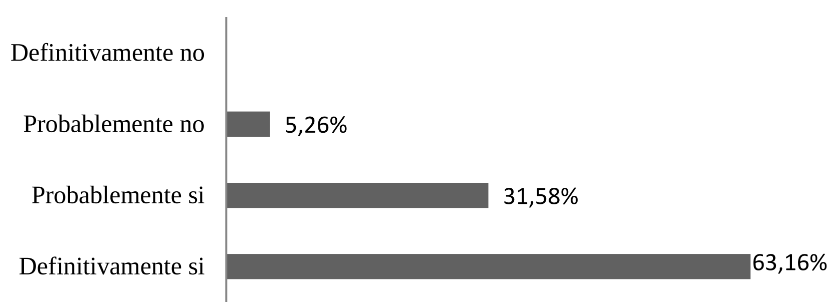


Figura 4. Empleo de metodologías en clases.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

En lo que concierne a la utilización de diferentes metodologías en clases y su aporte a la compresión del tema a tratarse manifestaron lo siguiente: El 63,16% concuerda que definitivamente le ayudaría a mejorar la comprensión del tema. Asimismo el 36,84% menciona que no aportan a la comprensión del tema debido a que la metodología empleada no fue la idónea para desarrollar sus habilidades de comprensión.

5. Para usted, la utilización de recursos didácticos en la enseñanza de las líneas y gráficas trigonométricas es:

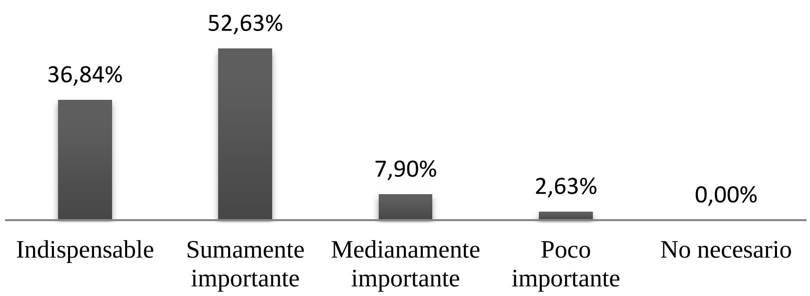


figura 5. Empleo de recursos didácticos.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

El 89,47% de los estudiantes encuestados consideran indispensable el empleo de recursos didácticos para la enseñanza del tema a tratarse, porque mediante la observación y manipulación de objetos didácticos podrían reforzar su entendimiento. De la misma manera el 10,53% piensa que es poco importante el empleo de recursos didácticos, lo que se intuye puede ser por la falta de autoaprendizaje por parte del educando.

6. **Cree usted, que la enseñanza de las líneas y gráficas trigonométricas a través del pizarrón fue:**

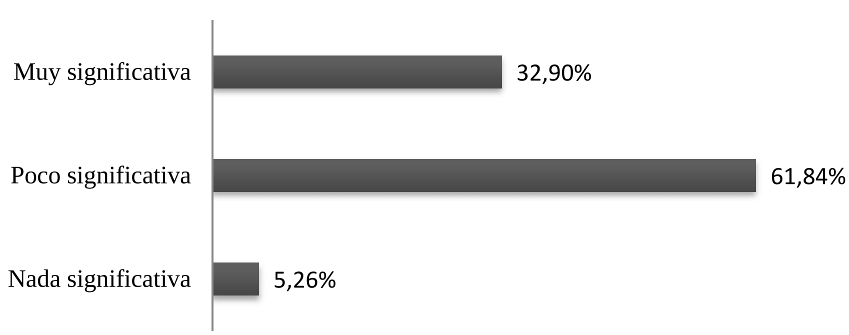


Figura 6. Enseñanza por medio del pizarrón.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

En lo que concierne al empleo del pizarrón en el proceso de enseñanza se concluyó que el 67,10% considera que no es significativa, ya que si bien es cierto es un recurso tradicional y necesario pero no suficiente debido a que convierte al estudiante en un actor pasivo, por lo que no se podrían desarrollar todas sus habilidades cognoscitivas y no les permiten descubrir o enlazar los conocimientos nuevos con los existentes en su memoria, lo que puede dificultar un entendimiento claro del tema, por lo contrario el 32.90% lo califica como significativo, debido a que pese a ser una herramienta esencial dentro de clases, no puede ser la única; esta debe complementarse con otros recursos didácticos para que en conjunto se potencialicen y perfeccionen.

7. ¿Considera usted que las actividades desarrolladas por el docente en clases de líneas y gráficas trigonométricas no contribuyeron a un aprendizaje significativo?

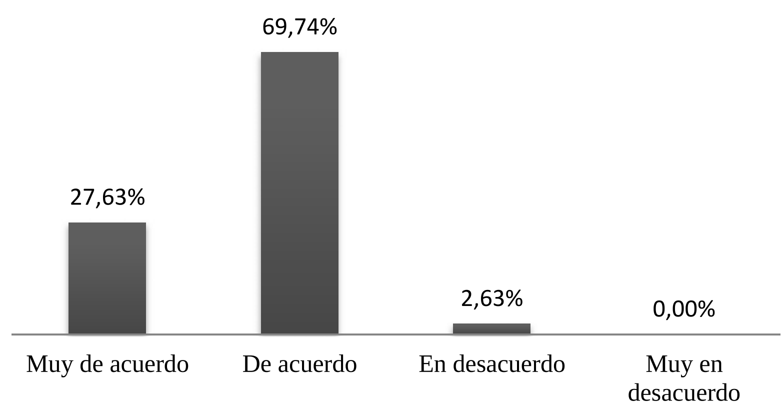


Figura 7. Actividades desarrolladas para un aprendizaje significativo.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Al averiguar si consideran que las actividades empleadas en clase por el docente aportaron a un aprendizaje significativo, el 97,37% están de acuerdo, debido a que dichas actividades no ayudaron a relacionar el tema con la vida real, asimismo el docente dio por hecho que los alumnos tenían los conocimientos previos necesarios para el aprendizaje de un nuevo tema, en cambio el 2,63% concuerdan que las actividades propuestas fueron idóneas.

8. ¿Qué aspectos se desarrollaron en el proceso de enseñanza de las líneas y gráficas

trigonométricas?

Para conocer qué aspectos predominaron en cada clase impartida se les presentó un cuadro comparativo, en el cual se mostró las principales características del enfoque tradicional y constructivista, en las que debían darle una calificación de 1 a 5. Donde 1-2 son aspectos del enfoque tradicional, 3 un valor intermedio y 4-5 son aspectos el enfoque constructivista. Para conocer qué enfoque fue utilizado por parte del docente en el proceso de enseñanza dentro de la clase, de acuerdo a cinco aspectos de cada teoría, pudiendo concluir lo siguiente:

8.1. Referente al método de enseñanza empleado.

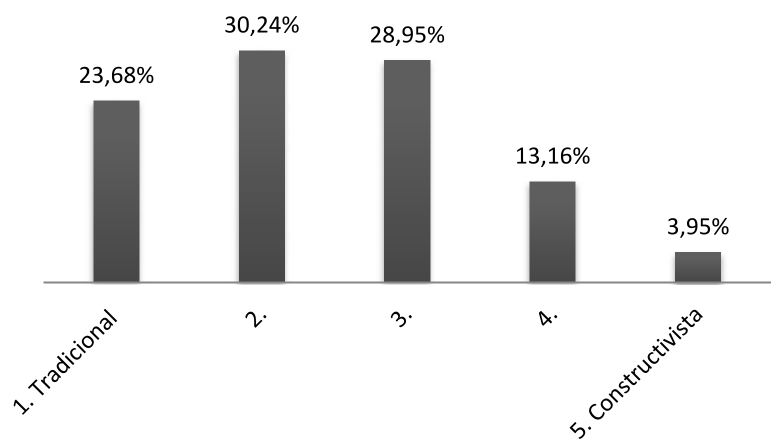


Figura 8.1. Empleo de métodos de enseñanza.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

En esta pregunta concerniente al empleo de métodos de enseñanza por parte del educador, el 15,11% consideraron que la clase se inclinó a la enseñanza constructivista, en cambio el 28,95% de los estudiantes manifestaron que las clases fueron desarrolladas en un nivel intermedio de estos dos enfoques presentados, mientras que el 53,94% considera que el proceso empleado al impartir las clases fue tradicional, debido a que la participación de ellos dentro del aula fue pasiva.

8.2. ¿Cómo se desarrolló la participación de los estudiantes en clase?

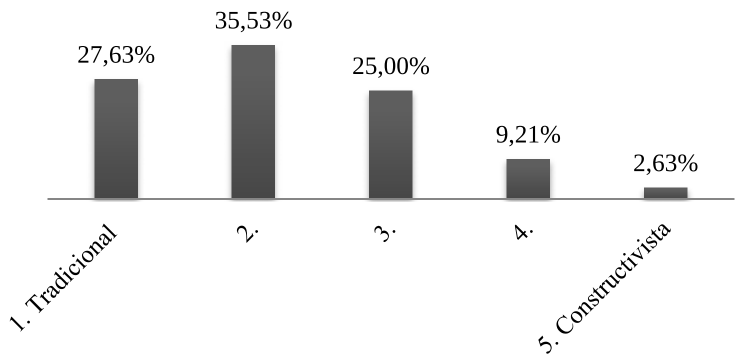


Figura 8.2. Participación de los estudiantes.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

En cuanto a la participación de los estudiantes, el 63,16% considera que su participación fue pasiva, mientras que el 25% cree que está en un nivel intermedio, en cambio el 11,84% considera que su participación fue activa, participativa y crítica durante el proceso de enseñanza, por lo que se buscó elaborar material concreto el cual pueda ser manipulado por el estudiantado.

8.3. ¿Cómo considera que se realizó el proceso de enseñanza?

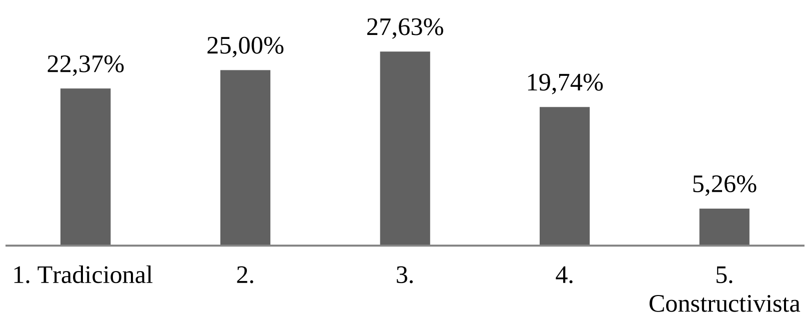


Figura 8.3. Proceso de aprendizaje.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Al investigar sobre cómo fue el proceso de aprendizaje el 47,37% de estudiantes consideran haber seguido al pie de la letra todo lo enseñado por el docente, mientras que el 27,63% dijeron haber realizado preguntas durante las clases de dicho tema y el 25% de los estudiantes consideran haberse cuestionado durante todo el proceso de aprendizaje del tema propuesto, por las razones antes mencionadas las actividades planteadas en la guía didáctica fueron creadas a manera de que los estudiantes sean reflexivo y críticos.

8.4. Empleo de recursos didácticos en clase.

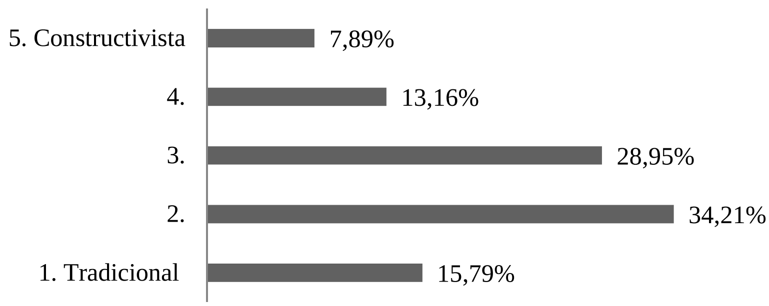


Figura 8.4. Empleo de material.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X

El 50% de los estudiantes consideran que el único recurso empleado por parte del docente durante el proceso de enseñanza fue el pizarrón, mientras que el 28,95% recuerda que el docente empleó otros recursos y el 21,05% expresó que el docente empleo diversos recursos para el aprendizaje de líneas y gráficas trigonométricas, debido a que un mayor porcentaje de estudiantes consideran que el único material empleado fue el pizarrón, se elaboraron una guía y recursos didácticos que conlleven a un aprendizaje constructivista.

8.5. ¿Cómo se realizó el proceso de evaluación?

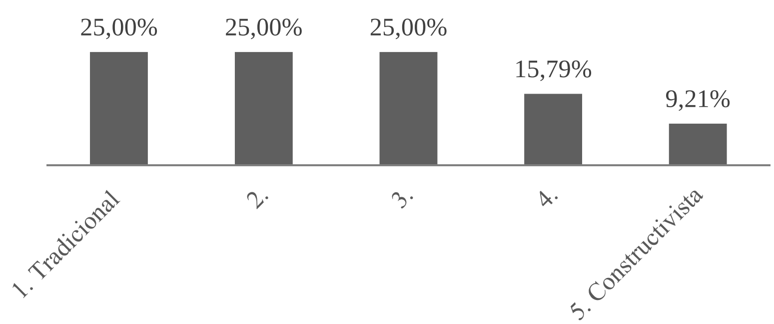


Figura 8.5. Proceso de evaluación.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Al referirnos cómo se dio el proceso de evaluación de los conocimientos expresaron lo siguiente: el 50% considera que dicho proceso se siguió realizando a través de pruebas y exámenes, mientras que el 25% piensan haber sido valorados de forma escrita, en cambio el 25% cree que fueron evaluados por su desempeño a través de la observación y participación en cada clase.

9. ¿Cómo califica usted su conocimiento sobre líneas y gráficas trigonométricas?

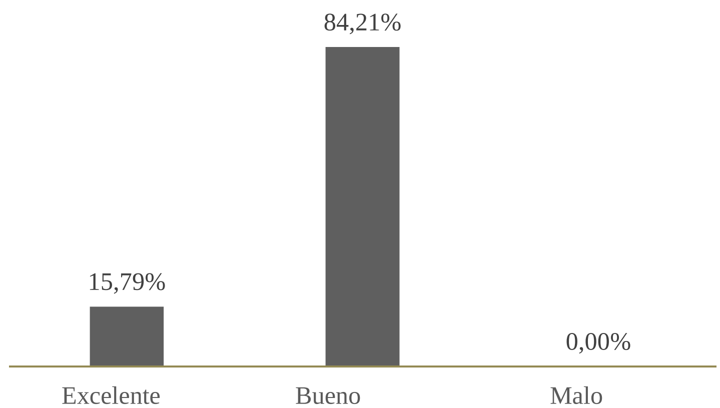


Figura 9. Conocimiento del tema.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

A cerca de cómo califica la asimilación del tema de líneas y gráficas trigonométricas un 15,79% supieron contestar como excelente, mientras que 84,21% lo catalogó como bueno, sin embargo se busca que el conocimiento asimilado sea excelente, porque es esencial para el aprendizaje de temas posteriores, por lo que se pretende que el educando a través de la significación, desarrolle la comprensión de cada tema presentado y pueda asociarla con temas relevantes del entorno y aportar a la mejora del entendimiento de las líneas y gráficas trigonométricas.

2.2.1. ENTREVISTA. CUADRO COMPARATIVO DE RESPUESTAS

CATEGORÍAS	DOCENTE 1	DOCENTE 2	CONCLUSIONES
Importancia de los recursos didácticos en la enseñanza.	Sí, puesto que se necesita un material que lograr relacionar cómo se obtienen las gráficas del círculo trigonométrico y pasarlas al sistema coordenado.	Sí, pero se debe considerar el tipo de material.	La enseñanza de las líneas gráficas de las funciones trigonométricas requiere de material concreto para mejorar la comprensión.
Métodos de enseñanza que empleados.	Explicación en la pizarra, trabajo colaborativo.	El exploratorio: realizar preguntas a los estudiantes. La explicación del maestro. Sustentación de los estudiantes.	Los métodos empleados han conllevado a una asimilación regular del tema, por lo que se debería emplear diferentes métodos.
Dificultades encontradas.	Los estudiantes no entienden qué es una función trigonométrica	Los estudiantes carecen de conocimientos básicos, hábitos de estudio, falta de interés por el tema.	Los estudiantes presentaron dificultades en la comprensión de temas posteriores.
Material didáctico empleado para la enseñanza.	Pizarra, compás y regla	La proyección, cablic geometric, gráficas de las funciones, cartulina, hilos.	El material didáctico empleado ha sido deficiente por lo que se requiere de novedosos materiales.
Empleo de TIC´S.	Las TIC´S se deben insertar en la propuesta curricular.	Deberían utilizarse pero siempre que el docente esté capacitado.	Es de suma importancia, puesto que las TIC´S son un medio para fortalecer los ambientes de aprendizaje.
Número de alumnos afecta en el empleo del material.	Sí, puesto que en grupos pequeños se puede solventar las inquietudes de manera personal.	Sí, porque no es lo mismo trabajar con un grupo pequeño que con uno grande.	La explicación se imparte de manera general, lo que provocó que las clases no sean personalizadas.

La guía didáctica ayudará a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.	Los aportes de la guía le brindan nuevas ideas al docente para mejorar la calidad de las explicaciones	Siempre un trabajo planificado aportará a un mejor entendimiento del tema.	Los aprendizajes mejorarán con el uso de una guía didáctica, porque le brinda ideas al docente para potenciar su explicación.

2.1.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS

De acuerdo a la investigación realizada, se puede expresar que los recursos empleados en el proceso de enseñanza no fueron idóneos, y dentro de la misma línea, se evidencio que los docentes se mantuvieron en la enseñanza tradicional, por lo que los estudiantes desarrollaron un papel pasivo, conllevando a que la asimilación de este contenido no sea excelente y presente ciertos vacíos en el conocimiento, lo cual dificulto el aprendizaje de temas posteriores. Anudado a esto, de acuerdo a la entrevista realizada, los resultados evidencian que el acto educativo, presento ciertas falencias como son la falta de material concreto para la enseñanza del tema de líneas y gráficas trigonométricas, debido a que dicho contenido demanda recursos que sean innovadores y manipulables. En cuanto a los problemas detectados, uno de ellos es que los estudiantes carecen de conocimientos previos indispensables, puesto que para comprender cómo se construyen las gráficas, se requiere que conozcan las líneas que representan cada una de las funciones. Igualmente, consideran que no se emplearon TICS, específicamente el uso de la herramienta Geogebra, puesto que dicho tema requiere de demostraciones de la variación cada uno de los diferentes parámetros de las funciones trigonométricas y dicha herramienta es de gran ayuda, sin olvidar que el docente debe estar capacitado en el manejo de la misma.

Debido a las razones antes mencionadas, se concluye que la enseñanza del tema de líneas y gráficas trigonométricas no puede limitarse tan solo al uso de la pizarra, es así que los docentes enfatizan que el empleo de material concreto y una guía didáctica, ayudarán a optimizar el proceso de enseñanza, es por esto que se crearon tres tableros, que le permita al estudiante, a partir del círculo trigonométrico y con la manipulación de ligas y remaches, construir las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente, y de este modo determinar las características de cada función, ya que por medio de los mismos, a más de respetar los diferentes estilos de aprendizaje, el estudiante será quien por sí mismo construya su conocimiento al crear un vínculo entre teoría y práctica.

CAPÍTULO III

PROPUESTA Y VALIDACIÓN:

3.1. ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA

3.1.1. DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

Por medio de los resultados obtenidos en la encuesta realizada a los estudiantes y las entrevistas a docentes de la carrera de Matemática y Física, se obtuvo información que ayudó a corroborar el problema planteado previamente, con el fin de elaborar la guía y recursos didácticos que pretender ayudar al docente y estudiantes desde un enfoque constructivista.

3.1.2. ESTRUCTURA DE LA PROPUESTA

En referencia a la estructura de la guía didáctica de líneas y gráficas trigonométricas, están divididas en siete clases de dos horas cada una, y constan de tres momentos: anticipación, construcción del conocimiento y consolidación. En estos tres momentos se han propuestos actividades como: lluvia de ideas, organizadores gráficos, resolución de ejercicios, tareas de investigación, uso de las TIC´S, material concreto, trabajo colaborativo y autónomo, con el objetivo de que los estudiantes sean los que construyan su propio conocimiento.

La guía didáctica abarca los siguientes temas:

- Líneas trigonométricas.
- Gráficas de las funciones seno, coseno y tangente por medio de material concreto.
- Gráficas de las funciones trigonométricas recíprocas en papel milimetrado.

3.1.3. ESTRUCTURA DE LA GUÍA DIDÁCTICA

CLASE	ANTICIPACIÓN	CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO	CONSOLIDACIÓN
Líneas trigonométricas	**Actividad individual:** Vídeo sobre las líneas y ángulos.	**Actividad grupal:** Construcción por medio del tablero con apoyo de ligas y remaches las líneas trigonométricas. Preguntas generadoras. Fundamentación teórica.	**Actividad individual:** Hoja de trabajo.
Gráfica de la función seno	**Actividad individual:** Exploración de conocimientos previos por medio de un cuestionario de preguntas.	**Actividad grupal:** Construcción por medio del tablero con uso de ligas y remaches la gráfica de la función seno. Fundamentación teórica. Ejercicios modelo. Preguntas generadoras.	**Actividad individual:** Hoja de trabajo.
Gráfica de la función coseno	**Actividad individual:** Clase invertida	**Actividad grupal:** Construcción por medio del tablero con apoyo de ligas y remaches la gráfica de la función coseno. Fundamentación teórica. Ejercicios modelo. Preguntas generadoras.	**Actividad en parejas:** Hoja de trabajo.
Gráfica de la función tangente	**Actividad grupal:** Lluvia de ideas.	**Actividad grupal:** Construcción por medio del tablero con apoyo de ligas y remaches la gráfica de la función tangente. Fundamentación teórica. Ejercicios modelos. Preguntas generadoras.	**Actividad grupal:** Cuestionario.
Gráfica de la función cosecante	**Actividad individual:** Evaluación diagnóstica sobre las gráficas de las funciones gráficas seno, coseno y tangente.	**Actividad individual:** Construcción de la gráfica de la función cosecante en hoja milimetrada. Fundamentación teórica. Ejercicios modelos Preguntas generadoras. Trabajo dirigido.	**Actividad individual:** Hoja de trabajo.

Gráfica de la función secante	**Actividad individual:** Organizador gráfico de las funciones seno, coseno, tangente y cosecante.	**Actividad individual:** Construcción de la gráfica de la función secante en hoja milimetrada. Fundamentación teórica. Ejercicios modelo. Preguntas generadoras. Trabajo dirigido.	**Actividad individual:** Hoja de trabajo.
Gráfica de la función cotangente	**Actividad individual:** Vídeo sobre la gráfica de la función cotangente.	**Actividad individual:** Construcción de la gráfica de la función cotangente a través de la hoja milimetrada. Fundamentación teórica. Ejercicios modelos. Preguntas generadoras. Trabajo dirigido.	**Actividad grupal:** Cuestionario.

3.2. GUÍA DIDÁCTICA PARA LÍNEAS Y GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Autoras:

- Jenny Carmen Guamán Coraisaca
- Ximena Aracely Malán Saravia

Director:

- Ing. Xavier González Romo

Universidad de Cuenca
Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación
Carrera Matemáticas y Física

Líneas y gráficas de las funciones trigonométricas. *Guía para el docente*
Guamán, J. & Malán, X.

Universidad de Cuenca
Cuenca - Ecuador
2019

Introducción

La presente guía contiene actividades y recursos que servirán de apoyo al docente al momento de planificar la asignatura de trigonometría, específicamente en los temas: líneas trigonométricas, gráficas de las funciones seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente, mediante el desarrollo de siete clases. Estas tendrán una duración de dos horas clase y han sido divididas en tres momentos: anticipación, construcción y consolidación del conocimiento.

Asimismo, cada clase está estructurada con actividades que permitirán al educando construir su propio conocimiento, a través de preguntas generadoras, por medio del trabajo colaborativo, cooperativo, autónomo y la aplicación de ejercicios. Además se propone el desarrollo de estrategias para cualquier momento de la clase como son: clases invertidas, lluvia de ideas, videos educativos, cuestionarios, preguntas generadoras, trabajo dirigido, etc.

Las actividades propuestas pretenden disminuir la abstracción de la materia por medio de la manipulación de tableros y la construcción de gráficas en hojas milimetradas. Igualmente, el diseño de esta guía para el docente, posibilitará que el estudiante desarrolle el conocimiento a través de la asociación y manipulación.

ÍNDICE

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

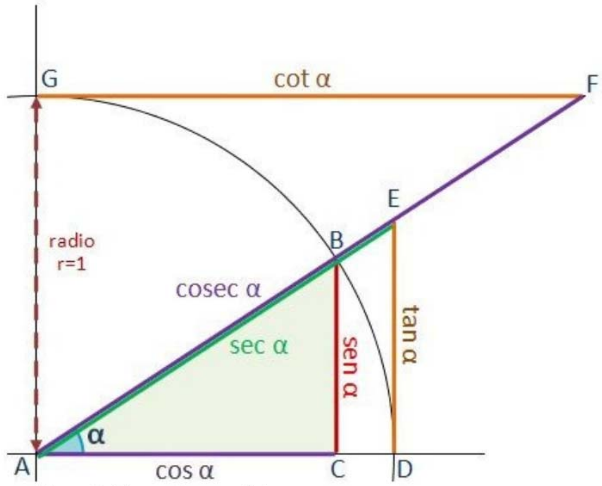


Figura 1. Líneas trigonométricas.
Fuente: https://matematicasmodernas.com/circulo-trigonometrico-y-funciones-trigonometricas/

OBJETIVOS

- **Reconocer las líneas trigonométricas con la ayuda de los arcos en el círculo trigonométrico.**
- **Determinar los signos de las líneas trigonométricas en el círculo unitario con material concreto.**

LOGROS DE APRENDIZAJE

- **Reconoce las líneas trigonométricas con la ayuda de los arcos del círculo trigonométrico.**
- **Determina los signos de las líneas trigonométricas en los cuatro cuadrantes.**

49

Clase N° 1
Líneas trigonométricas

¿Sabías que...?

- Hiparco de Nicea es considerado el padre de la trigonometría.
- La palabra trigonometría se deriva de dos raíces griegas: "trigon", que significa triángulo y "meta", que significa medida.


Figura 2. Hiparco de Nicea. Fuente:https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=hiparco+de+nicea

Anticipación: **Sesión 1:** Duración 2 horas

Actividad individual: Video sobre las líneas y ángulos.

Para esta actividad el docente puede reproducir el video en la siguiente dirección: https://www.youtube.com/watch?v=MLDDOx-L8Xg. Una vez finalizado el video el docente podría realizar las siguientes preguntas:

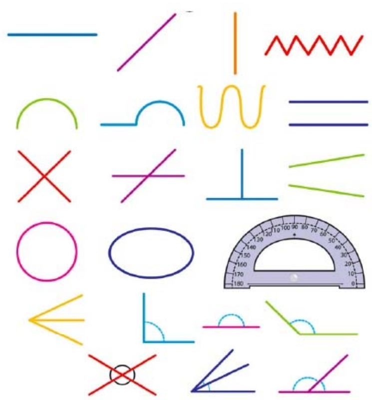


Figura 3. Líneas y ángulos.
Fuente: https://www.toys2teach.mx/PLUMOAGUA-LINEAS-Y-ANGULOS,7139_419292758

1. ¿Enuncie los cinco tipos de líneas que existen?
Línea recta, línea curva abierta, línea curva cerrada, línea poligonal abierta y la línea poligonal cerrada.
2. ¿Qué es una línea recta y en que se la emplea en general?
La línea recta es una seguidilla de puntos que se extiende indefinidamente y de manera continua en una única dimensión y se utilizan para dibujar figuras geométricas.
3. ¿Qué es un segmento de recta?
Un segmento de recta es la porción de una recta que está delimitada por dos puntos; uno inicial y uno final.
4. ¿Cúal es la diferencia entre la rectas paralelas y las rectas secantes?
Las rectas paralelas no se cortan, en cambio las rectas secantes si se cortan.
5.¿Qué es un ángulo?
Un ángulo es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas llamados lados con un mismo origen llamado vértice.
6. ¿Qué son las rectas perpendiculares?
Las rectas perpendiculares son dos líneas que se cortan en un punto, formando cuatro ángulos rectos.

51

Anticipación:

Saberes previos:

Se recomienda al docente realizar las siguientes preguntas acerca de las razones trigonométricas y el círculo unitario, con la finalidad de explorar los conocimientos previos.

- ¿Cuáles son las seis razones trigonométricas que se encuentran en el triángulo rectángulo?

$$Sen\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} \qquad Sen\ \alpha = \frac{C.O}{H}$$

$$Cos\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} \qquad Cos\ \alpha = \frac{C.A}{H}$$

$$Tan\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} \qquad Tan\ \alpha = \frac{C.O}{C.A}$$

$$Csc\ \alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto} \qquad Csc\ \alpha = \frac{1}{Sen\ \alpha}$$

$$Sec\ \alpha = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente} \qquad Sec\ \alpha = \frac{1}{Cos\alpha}$$

$$Cot\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto} \qquad Cot\ \alpha = \frac{1}{Tan\ \alpha}$$

Figura 4. Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.
Fuente: https://matesnoaburridas.wordpress.com/2015/01/26/trigonometria-medida-de-angulos-y-razones-trigonometricas/

- Con sus propias palabras defina, ¿qué es un círculo, cúal es su ecuación y qué longitud tiene el radio de la figura 5?

El círculo es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia (radio) de un punto fijo llamado centro.

Su ecuación es: $x^2 + y^2 = 1$.

El radio de la figura 5 tiene una longitud de una unidad y por está razón se lo llama círculo unitario.

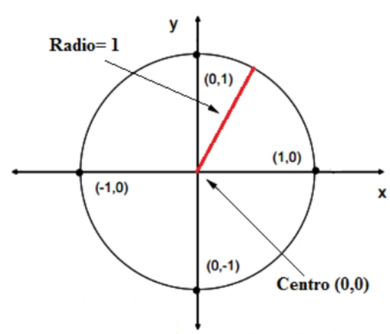


Figura 5. Círculo unitario.
Fuente: Pérez, F. (2017). Matemática 10mo.

52

Actividad grupal: Preguntas generadoras.

Objetivos:

- Dibujar las líneas trigonométricas.
- Establecer las características de las líneas trigonométricas.

Aprendamos haciendo

Materiales:

* Tablero de las líneas trigonométricas
* Ligas
* Remaches

Procedimiento:

1. Se sugiere que el docente divida el número de estudiantes en grupos, luego les entregue el tablero, las ligas y remaches.

De la misma manera, se recomienda que el docente solicite a los estudiantes observar las características del tablero (Figura 6). Posteriormente un miembro de cada grupo debe pasar al pizarrón a escribir las características observadas.

Características del tablero:

- El radio del círculo es igual a 1, debido a que es más facil trabajar las funciones trigonométricas.
- El círculo trigonométrico tiene diferentes divisiones tanto en grados sexagesimales como en radianes.
- A partir del ángulo de 0°, si el giro es en sentido antihorario toma el signo positivo y si el giro es en sentido horario toma el signo negativo.
- El círculo trigonométrico o unitario está dividido en cuatro cuadrantes con sus respectivos signos.

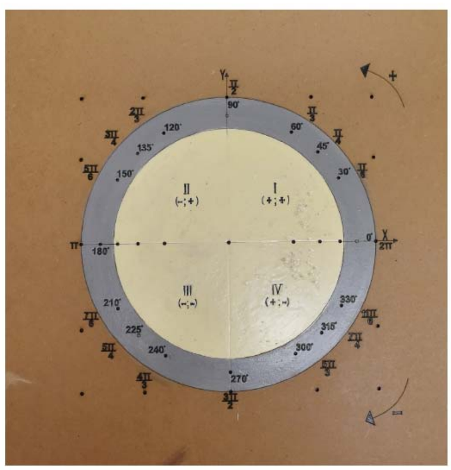


Figura 6. Tablero de las líneas trigonométricas.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Líneas seno y coseno

2. Aplicando las definiciones de las razones trigonométricas se le solicitará al educando que forme en el tablero un triángulo rectángulo para el valor de 30° con las ligas y remaches (Figura 7), posterior a esto se le formulará las siguientes preguntas.

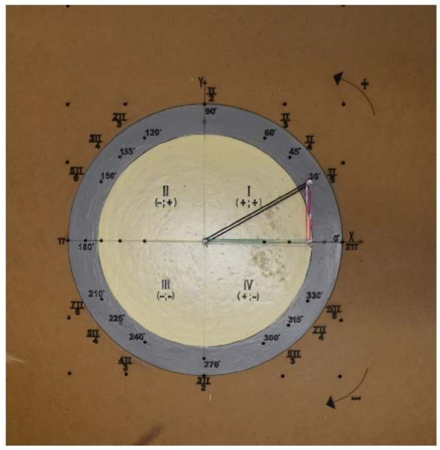


Figura 7. Construcción de las líneas seno y coseno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué lados del triángulo rectángulo representan el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa en el triángulo construido?

El cateto opuesto está representado por la liga color rosada, el cateto adyacente está representado por la liga color verde y la hipotenusa está representado por la liga color negra.

- ¿La hipotenusa del triángulo puede ser también el radio del círculo unitario?

Si, porque se está trabajando con la unidad.

- ¿ A qué línea representa el cateto opuesto y a qué línea el cateto adyacente?

El cateto opuesto representa la línea del seno, mientras que el cateto adyacente representa a la línea del coseno.

- ¿A qué eje coordenado es paralelo la línea del seno y a cuál eje coordenado es paralelo la línea coseno?

La línea del seno es paralelo al eje y o de las ordenadas, mientras que, la línea del coseno es paralelo al eje x o de las abscisas.

- A partir de la definición del seno de un ángulo, ¿qué sucede con dicha razón si la hipotenusa es igual a 1?

El sen α= cateto opuesto / hipotenusa, es así que, sen $\alpha = y/1$, por tanto:
sen $\alpha = y$.

- A partir de la definición del coseno de un ángulo, ¿qué sucede con dicha razón si la hipotenusa es igual a 1?

El cos α = cateto adyacente / hipotenusa, es así que, cos $\alpha = x / 1$, por tanto:
cos $\alpha = x$.

54

- ¿Qué línea trigonométrica representa el cateto opuesto y el cateto adyacente?

El cateto opuesto representa la línea del seno, mientras que el cateto adyacente representa a la línea del coseno.

3. Ahora los estudiantes deben construir un triángulo rectángulo para el ángulo de 45°, sin retirar el de 30°. Seguido a esto, trabajar con los ángulos de 60° y 90°. (Figura 8 y 9)

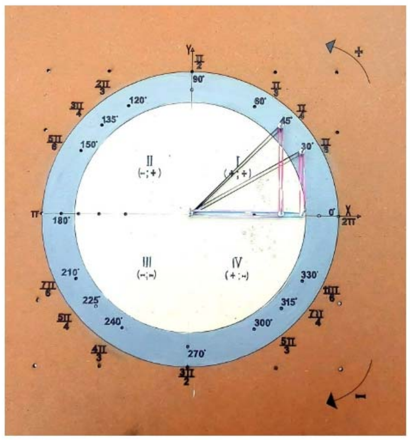


Figura 8. Construcción de las líneas seno y coseno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

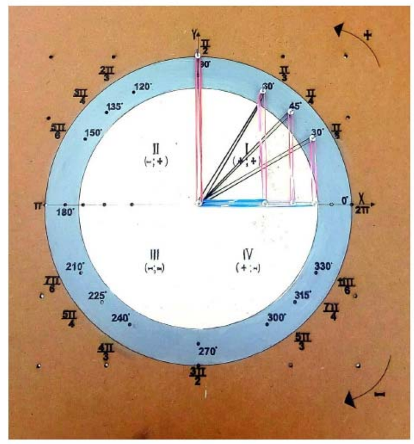


Figura 9. Construcción de las líneas seno y coseno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucedió con la línea del seno y la del coseno, crecieron o decrecieron?

La línea del seno crece, mientras que, la línea del coseno decrece.

- ¿En relación a que eje, la línea del seno empieza a crecer?

En relación al eje Y.

- ¿En relación a que eje, la línea del coseno empieza a decrecer?

En relación al eje X.

- ¿Qué sucede con la línea del coseno en el ángulo de 90°?

La línea del coseno desaparece, es decir, toma un valor de cero.

- ¿Qué sucede con la línea del seno en 90º?

La línea seno toma su máxima altura, es decir, toma un valor de uno.

4. Continuar con la elaboración de los triángulos rectángulos para los ángulos restantes.

Líneas tangente y secante

5. Se les pedirá que construyan dos triángulos rectángulos, el primero en 30°,pero en este caso el cateto opuesto será tangente a la circunferencia (Figura 10). Posterior a esto, se construirá un triángulo para el valor de 45° sin retirar el de 30°.

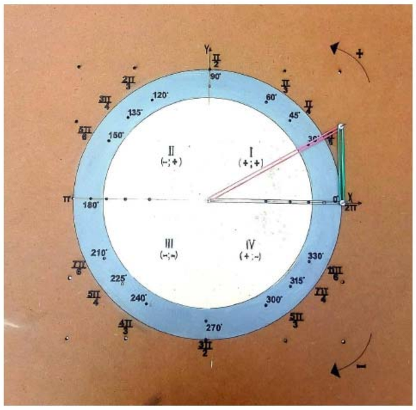


Figura 10. Construcción de las líneas tangente y secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

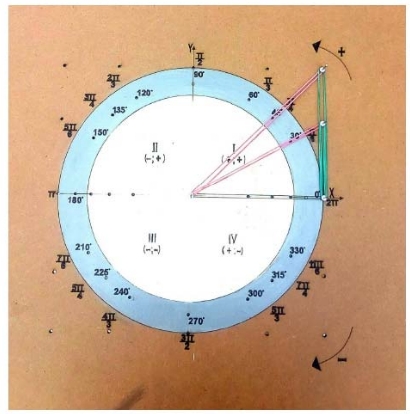


Figura 11. Construcción de las líneas tangente y secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Por qué se dice que el cateto opuesto es tangente al origen de ángulos?

Por que corta al círculo unitario en un punto, en el eje de las abscisas.

- ¿ Qué sucede con la longitud del cateto opuesto (tangente) con respecto a los ángulos de 30° y 45°?

La línea presenta un comportamiento creciente.

- ¿ Qué sucedió con la longitud de la hipotenusa con respecto a los ángulos de 30° y 45°?

La línea presenta un comportamiento creciente.

- ¿ Qué sucede con la longitud del cateto adyacente?

La longitud es la misma para los dos ángulos.

- ¿A que eje coordenado es paralelo la línea tangente?

La línea tangente es paralelo al eje y o de las ordenadas.

- ¿Por qué a la hipotenusa se la conoce como línea secante?

Porque tiene dos puntos de corte, un corte con el círculo trigonométrico y otro corte con la línea tangente en un mismo plano.

- A partir de la definición de la tangente de un ángulo, ¿qué sucede con dicha razón si el cateto adyacente es igual a x?

La tan α = cateto opuesto / cateto adyacente, es así que:
tan $\alpha = y/x$, es decir, tan α = sen α / cos α.

56

- A partir de la definición de la secante de un ángulo, ¿qué sucede con dicha razón si la hipotenusa es igual a 1?

La sec α = hipotenusa / cateto adyacente, es así que:
sec α = 1 / cos α.

- ¿Qué línea trigonométrica representa el cateto opuesto y qué línea la hipotenusa

El cateto opuesto representa la línea de la tangente, mientras que la hipotenusa representa a la línea de la secante.

6. Ahora los estudiantes deben construir un triángulo rectángulo para el ángulo de 60° y 90° (Figura 12).

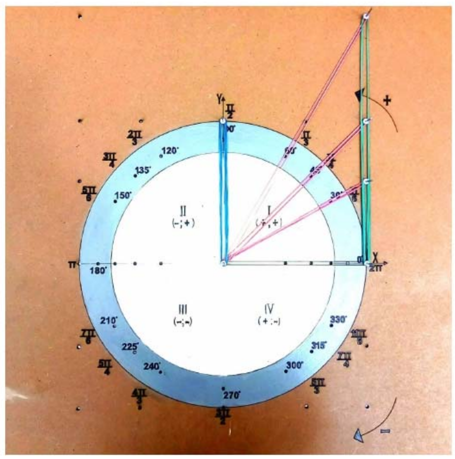


Figura 12. Construcción de las líneas tangente y secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucedió con la línea tangente y la secante, crecieron o decrecieron?

La línea tangente y secante crecen en igual proporcionalidad.

- ¿En relación a que eje coordenado, la línea tangente empieza a crecer?

En relación al eje Y.

- ¿En relación a que eje, la línea secante corta en un punto en común?

En relación a la línea tangente.

- ¿Se puede formar un triángulo rectángulo para el ángulo de 90°, qué sucede con las líneas tangente y secante?

No se puede formar un triángulo, debido a que las longitudes de las líneas secante y tangente no estan definidas porque tienden al infinito, debido a que la línea secante forma una línea paralela con la línea tangente.

7. Continuar con la elaboración de los triángulos rectángulos para los ángulos restantes.

Líneas cotangente y cosecante

8. Asimismo, construir dos triángulos rectángulos para los ángulos de 30°, considerando que la línea cotangente es perpendicular al eje de las ordenadas y la línea cosecante inicia en el origen de complementos hasta intersectar a la hipotenusa. Posterior a esto, se construirá un triángulo para el valor de 45° sin retirar el de 30°.

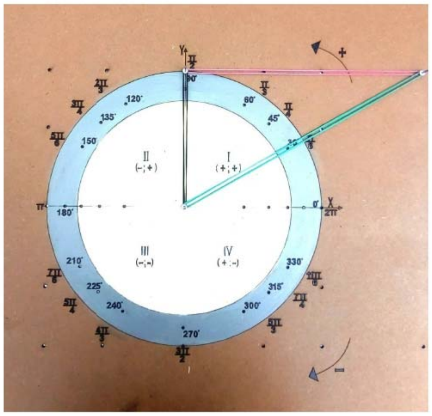


Figura 13. Construcción de las líneas cotangente y cosecante
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

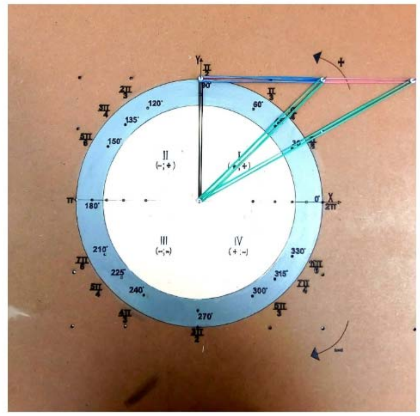


Figura 14. Construcción de las líneas cotangente y cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿ Podrían formar un triángulo rectángulo en el ángulo de 0°?

No se puede formar un triángulo, debido a que las longitudes de las líneas cosecante y cotangente no están definidas porque tienden al infinito, y son paralelas.

- ¿ Qué sucede con las líneas cotangente y cosecante en el ángulo de 30° respecto al de 45°, crecieron o decrecieron?

Las líneas cotangente y cosecante decrecen.

- ¿ Qué sucede con la longitud de las líneas cotangente y cosecante en el ángulo de 45°?

Las medidas de sus longitudes son iguales.

- Porqué se dice que el cateto adyacente es tangente al origen de complemento de ángulos?

Por que corta al círculo unitario en un punto, en el eje de las ordenadas.

- ¿ Qué sucede con la longitud del cateto adyacente (cotangente) con respecto a los ángulos de 30° y 45°?

Las líneas presentan un comportamiento decreciente.

- ¿ Qué sucedió con la longitud de la hipotenusa (cosecante) con respecto a los ángulos de 30° y 45°?

La longitud de la línea presentan un comportamiento decreciente.

- ¿ Qué sucede con la longitud del cateto opuesto?

La longitud es la misma para los dos ángulos.

- ¿A que eje coordenado es paralelo la línea cotangente?

La línea cotangente es paralelo al eje x o de las abscisas.

58

- ¿Por qué a la hipotenusa se la conoce como línea cosecante?

Porque tiene un punto de corte con la cotangente en un mismo plano.

- A partir de la definición de la cotangente de un ángulo, ¿qué sucede con dicha razón si el cateto adyacente es igual a y?

La cot α = cateto adyacente / cateto opuesto, es así que:

cot $\alpha = x / y$, es decir, cot = cos α / sen α.

- A partir de la definición de la cosecante de un ángulo, ¿qué sucede con dicha razón si la hipotenusa es igual a 1?

La csc α = hipotenusa / cateto opuesto, es así que:

csc α = 1 / sen α

- ¿Qué línea trigonométrica representa el cateto adyacente y qué línea la hipotenusa?

El cateto adyacente representa la línea cotangente, mientras que la hipotenusa representa a la línea cosecante.

9. Ahora los estudiantes deben construir un triángulo rectángulo para el ángulo de 60° y 90°.

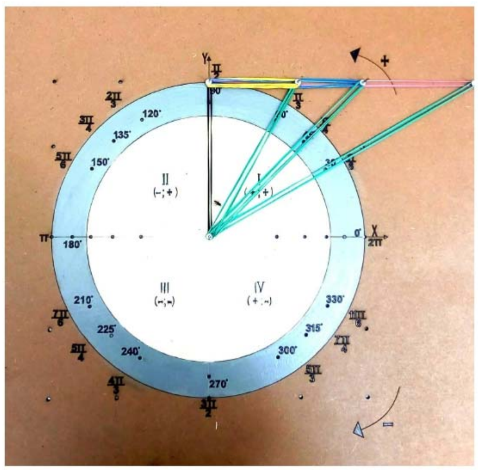


Figura 15. Construcción de las líneas cotangente y cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucedió con la línea tangente y la secante, crecieron o decrecieron?

La línea tangente y secante crecen en igual proporcionalidad.

- ¿En relación a qué eje coordenado, la línea tangente empieza a crecer?

En relación al eje Y.

- ¿En relación a qué eje, la línea secante corta en un punto en común?

En relación a la línea tangente.

- ¿Qué sucede con la longitud de las líneas cotangente y secante en el ángulo de 90°?

Su longitud es igual a 1.

10. Continuar con la elaboración de las líneas cotangente y cosecante para los ángulos restantes.

Construcción de las seis líneas trigonométricas para un mismo ángulo

11. Dibujar las seis líneas para el ángulo de 30°.

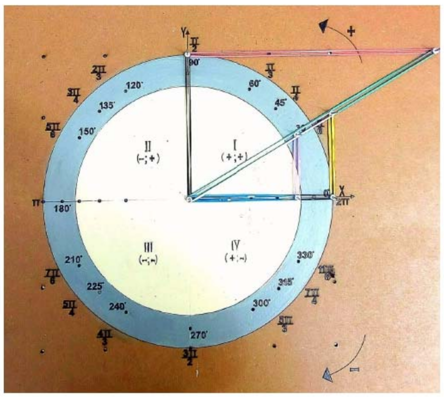


Figura 16. Construcción de las seis líneas trigonométricas.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué ángulo forman las líneas seno y coseno?

Las dos líneas forman un ángulo de 90º.

- ¿Qué línea tiene mayor longitud, la tangente o cotangente?

La longitud de de la línea cotangente es mayor a la longitud de la línea tangente.

- ¿ Son de la misma longitud las líneas secante y cosecante. Si o no, por qué?

No, porque la longitud de la línea secante es menor que la longitud que alcanza la línea cosecante.

12. Finalmente, dibujar las seis líneas para el ángulo de 45°. Luego continuar con el mismo proceso para los demás ángulos.

- ¿ Qué longitud tienen las líneas seno y coseno?

La longitud de la línea seno es la misma que la longitud de la línea coseno.

- ¿Qué línea tiene mayor longitud, la tangente o cotangente?

La longitud de la línea tangente es la misma que la longitud de la línea cotangente.

- ¿ Qué longitud tienen las líneas secante y cosecante?

La longitud de la línea secante es la misma que la longitud de la línea cosecante.

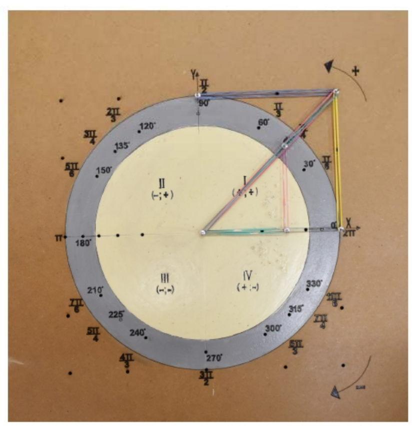


Figura 17. Construcción de las seis líneas trigonométricas.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Conclusiones:

Se sugiere que las siguientes preguntas se realicen a los estudiantes con el fin de conocer su comprensión sobre la construcción de las líneas trigonométricas en el tablero.

1.¿Qué son las líneas trigonométricas?

Son segmentos de rectas orientados cuya medida nos representa el valor numérico de alguna razón trigonométrica.

2. ¿Qué elementos del arco deben ser considerados para la construcción de las líneas trigonométricas?

Los elementos a ser considerados son el origen, sentido y fin del arco.

3. Por qué se da el valor de la unidad al radio del círculo trigonométrico.

Porque se está trabajando con una circunferencia y como se sabe la suma de los valores X & Y elevados al cuadrado debe ser igual a 1.

4. Cuáles son las seis razones trigonométricas que se encuentran con las líneas trigonométricas.

Seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

5. ¿Qué sucede con las líneas trigonométricas cuando se trabaja con un ángulo de 45º?

Las líneas de seno, coseno, tangente y cotangente; así como también las líneas secante y cosecante toman las mismas medidas.

CONTENIDO CIENTÍFICO

Introducción

Las líneas trigonométricas son los segmentos de rectas que coinciden con cada una de las razones trigonométricas, a través de ángulos a los cuales les corresponde un arco de circunferencia, descrito con un radio arbitrario (r=1), haciendo centro en su vértice y recíprocamente.

Círculo orientado

Un círculo es orientado cuando se ha elegido el sentido positivo sobre su circunferencia. Es decir, su giro se realiza en sentido contrario a las manecillas del reloj. Mientras que, si su giro es en sentido del reloj, se dice que el círculo no es orientado, es decir, es negativo.

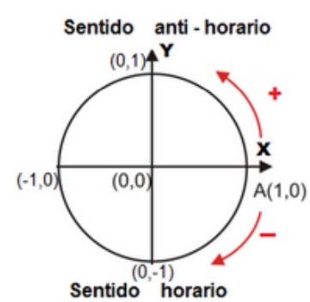


Figura 18. Signos del círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Arco

Se llama arco al camino que recorre un móvil sobre el círculo en un sentido determinado.

El **punto de partida A** del móvil se llama **origen del arco** y el **punto de llegada B** se llama **extremo del arco.**

61

SENTIDO DEL ARCO: Un arco se llama positivo o negativo según sea recorrido en el sentido positivo o en el sentido negativo.
LONGITUD DEL ARCO: Es el número que expresa su razón a otro arco de la misma circunferencia escogido como unidad.

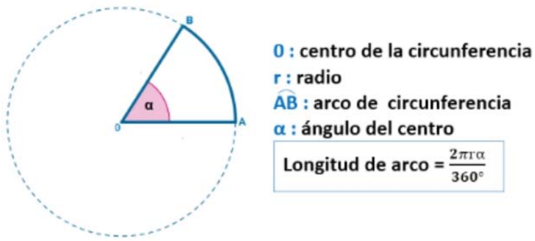


Figura 19. Longitud del arco.
Fuente: http://strateeg.eu/20170616085426_como-hallar-un-sector-circular/)

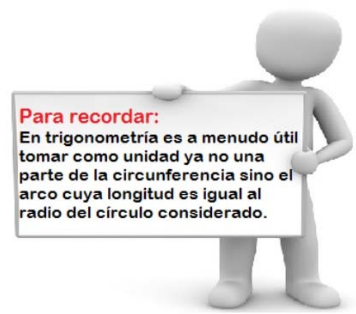


Figura 20. Para recordar.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Círculo trigonométrico

En Trigonometría por facilidad se toma como unidad de longitud el radio del círculo que se considera. Este círculo, cuyo radio es igual a 1, se llama círculo trigonométrico.
La circunferencia del círculo trigonométrico, es decir, el arco de 360°, tiene por longitud 2π rad; la semicircunferencia o arco de 180°, tiene por longitud π rad; el arco de 90°, tiene por longitud π/2 rad.

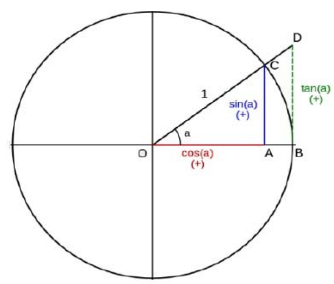


Figura 21. Círculo trigonométrico.
Fuente: https://es.wikipedia.org /wiki/Archivo:Cuadrante1.svg

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Conviene finalmente en tomar como longitud el radio OA del círculo considerado. Desde luego, las seis relaciones trigonométricas del arco AM, o del ángulo AOM se reducen a sus numeradores. Estos numeradores, son las medidas de segmentos de rectas que toman el nombre de líneas trigonométricas.
Las definiciones que anteceden pueden entonces reemplazarse por las siguientes:

1) El seno de un arco, es el segmento de la perpendicular bajada del extremo del arco M sobre el diámetro que pasa por el origen generando un punto P.

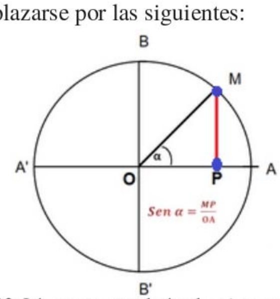


Figura 22. Línea seno en el círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

62

2) El coseno de un arco es la distancia del centro hasta el punto Q.

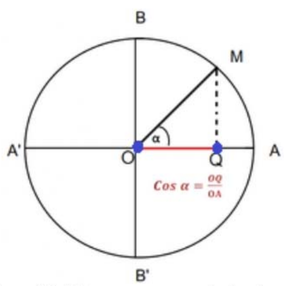


Figura 23. Línea coseno en el círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

3) La tangente de un arco es el segmento comprendido desde el origen del arco (punto A), y la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco (punto M), generando un punto T.

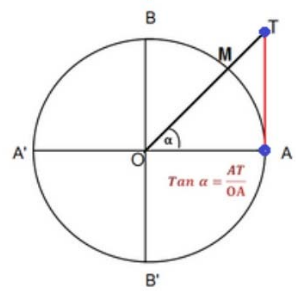


Figura 24. Línea tangente en el círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

4) Secante de un arco, es el segmento del diámetro que nace del origen comprendido entre el centro del arco y el punto T.

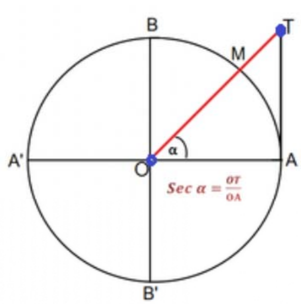


Figura 25. Línea secante en el círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

5) Cotangente es el segmento que va desde el punto B de la tangente trazada al círculo en el origen de los complementos, comprendido entre este origen y la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco (punto M), generando un punto S.

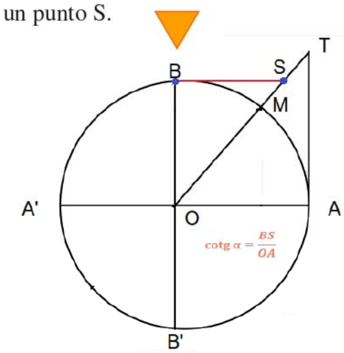


Figura 26. Línea cotangente en el círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

6) Cosecante es el segmento de recta comprendido entre el centro O y el punto M.

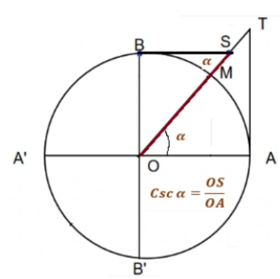


Figura 27. Línea cosecante en el círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

63

Signos de las líneas trigonométricas.

Todo segmento perpendicular al diámetro BB' es positivo a la derecha de este diámetro y negativo a la izquierda. Todo segmento perpendicular al diámetro AA' es positivo arriba de este diámetro y negativo abajo.

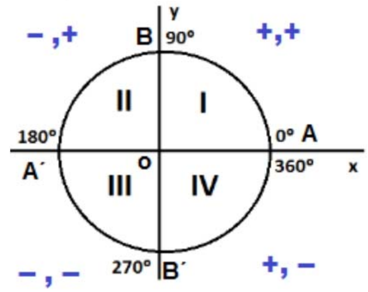


Figura 28. Signos del círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Así, el seno de un arco es positivo cuando este arco termina en el 1º o en el 2º cuadrante y negativo cuando termina en el tercer o cuarto cuadrante. La tangente es positiva en el primer y tercer cuadrante y negativa en el segundo y cuarto. El coseno es positivo en el primer y cuarto cuadrante y negativo en el segundo y tercero. La secante de un arco es siempre del mismo signo que su coseno; la cotangente es del mismo signo que su tangente; y la cosecante del mismo signo que su seno.

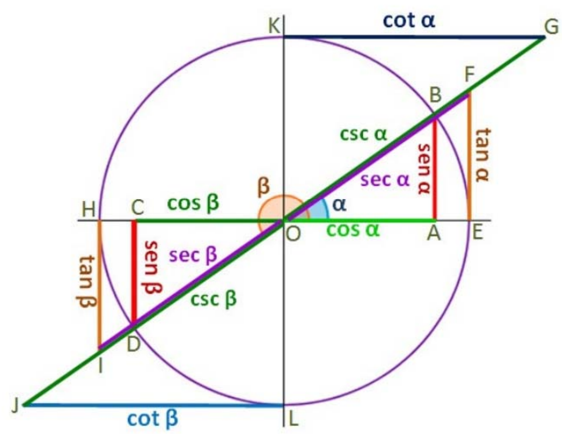


Figura 29. Razones trigonométricas
Fuente: https://www.pinterest.es/pin/298785756519614791/?autologin=true

64

Actividad individual: Hoja de trabajo.

PON A PRUEBA TU CONOCIMIENTO

1. En la siguiente gráfica, identifique las seis líneas trigonométricas en el primer y tercer cuadrante según el ángulo dado:

- Primer cuadrante 60º
- Tercer cuadrante 210º

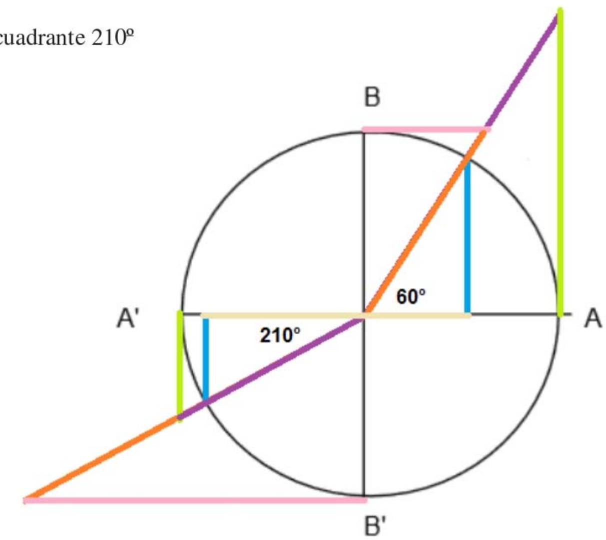


Figura 30. Líneas trigonométricas.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

2. Responda las siguientes preguntas con respecto a las líneas trigonométricas:

- ¿Por qué es importante conocer el sentido de giro que toman las líneas trigonométricas?

Para conocer que signo le corresponde a las líneas trigonométricas.

- ¿Son iguales las longitudes de las líneas trigonométricas para los valores de 45°, 135°, 225° y 315°. Si o no, por qué?

Si, debido a que la longitud de la línea del seno tiene la misma longitud que de la línea coseno, lo mismo sucede con las líneas tangente y cotangente y con las líneas cosecante y secante.

- ¿A qué eje es tangente la línea cotangente y la línea tangente?

La línea tangente es tangente al origen de ángulos o arcos, mientras que la línea cotangente es tangente al origen de complementos.

- ¿Qué sucede con la línea del seno en el primer cuadrante?

La longitud de la línea seno tiene un comportamiento creciente, en cambio la longitud del coseno tiende a decrecer.

- ¿Qué sucede con la línea tangente en los valores de 90°, 270°, 450°, etc.?

Dado que la línea secante forma una paralela con la línea tangente no se puede formar un triángulo rectángulo, lo que conlleva a que en estos valores se formen asíntotas verticales.

- ¿Qué sucede con la línea cotangente en los valores de 0°, 180°, 360°, etc.?

Dado que la línea cosecante forma una paralela con la línea cotangente no se puede formar un triángulo rectángulo, lo que conlleva a que en estos valores se formen asíntotas verticales.

- ¿Por qué se le llama línea secante y cosecante?

Porque corta en dos puntos en un mismo plano, la línea secante corta con respecto al eje y, mientras que la línea cosecante corta con respecto al eje x.

- ¿Por qué se utiliza la unidad como medida del radio del círculo trigonométrico?

Porque al seleccionar cualquier punto del círculo trigonométrico y elevarlos al cuadrado da como resultado la unidad.

- ¿Por qué se utiliza el triángulo rectángulo en las líneas trigonométricas?

Porque la suma del cuadrado de los catetos es igual a la hipotenusa y en el circulo trigonométrico se toma a la unidad como medida de la hipotenusa por motivos facilidad, pero la hipotenusa puede tener cualquier valor.

- ¿Cuáles son las dos formas de medir ángulos?

Los ángulos se pueden medir en grados sexagesimales y radianes.

3. Complete la siguiente tabla, de acuerdo a los signos que tienen el seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente en los cuatro cuadrantes.

	I	II	III	IV
Sen	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
Tan	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-
Sec	+	-	-	+
Csc	+	+	-	-

Figura 31. Signos de las líneas trigonométricas.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

66

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SENO

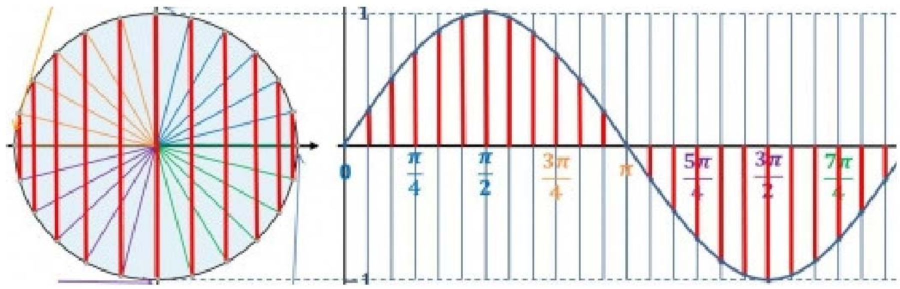


Figura 32. Gráfica de la función coseno.
Fuente: Gráficas funciones trigonométricas. L2DJ Temas de Matemáticas INC,2011.

OBJETIVOS

- Definir la función seno.
- Construir y analizar la gráfica de la función seno.
- Identificar las características de la curva de la función seno.

LOGROS DE APRENDIZAJE

- Define la función seno a partir del círculo trigonométrico.
- Identifica su respectiva gráfica a partir del ánalisis de características particulares.

67

CLASE N° 2

Gráfica de la función seno

Anticipación **Sesión 2:** Duración 2 horas.

Actividad individual: Exploración de conocimiento previos.

Al iniciar la clase, el docente puede realizar las siguientes preguntas a diferentes estudiantes, con la finalidad de determinar sus conocimientos previos.

a) ¿Qué es una función?

Resp: Una función matemática es una relación que se establece entre dos conjuntos, a través de la cual a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto o ninguno.

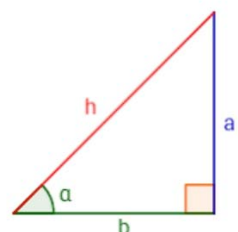


Figura 33. Elementos del triángulo rectángulo. Fuente: https://www.ditutor.com/geometria/triangulo_rectangulo.html

b) ¿Qué es el dominio de una función?

Resp: El dominio de una función f (x) es el conjunto de todos los valores para los cuales la función está definida

c) ¿Qué es el rango de una función?

Resp: El rango de la función es el conjunto de todos los valores que toma la función.

d) Para qué tipo de triángulos están definidas las razones trigonométricas?

Resp: Rectángulos.

e) ¿Cuál es la razón trigonométrica que se define como el cociente entre el lado opuesto y la hipotenusa?

Resp: Seno.

f) ¿Cuál es la razón recíproca de la tangente?

Resp: Cotangente

¿Sabías que...?

Las funciones trigonométricas se utilizan en varias ciencias como la astronomía, física, medicina, arquitectura, entre otras.

69

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad grupal: Preguntas generadoras

Objetivos:

* Construir la gráfica de la función seno
* Identificar las características de la curva de la función seno

Aprendamos haciendo

Materiales:

* Tablero de la gráfica de la función seno
* Remaches
* Ligas

.

Explicación previa

Obsevar el tablero, el cual tiene en la parte izquierda el círculo trigonométrico y en la parte derecha el plano cartesiano; los mismos que tienen divisiones de 30° hasta 360°, así como también en radianes, las cuales son dos formas de medir ángulos.

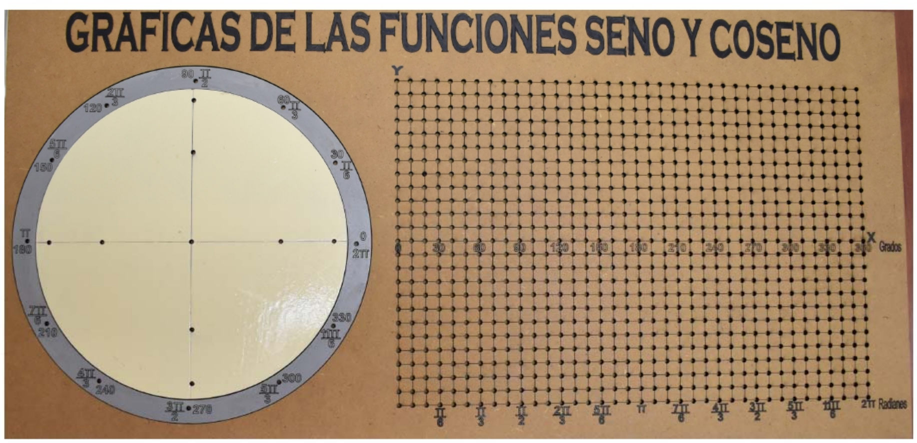


Figura 34. Tablero de las funciones seno y coseno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

70

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Procedimiento:

1. Formar un triángulo rectángulo en el círculo trigonométrico, para un ángulo de 30° con ayuda de los remaches y las ligas. Luego, identificar que lado del triángulo rectángulo representa la función seno. Trasladar la longitud de dicho lado al plano cartesiano en el ángulo correspondiente. (Observar figura 35)

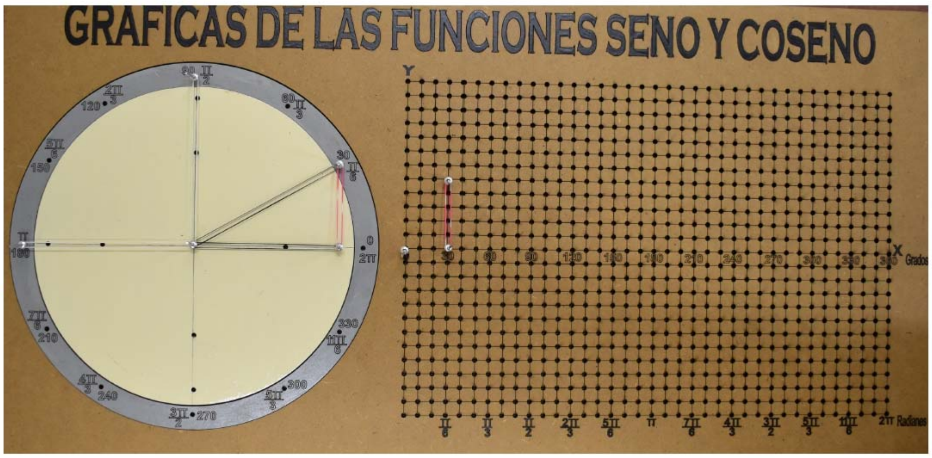


Figura 35. Construcción de la gráfica de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

2. Continuar con el mismo procedimiento para el ángulo de 60° hasta 180°.

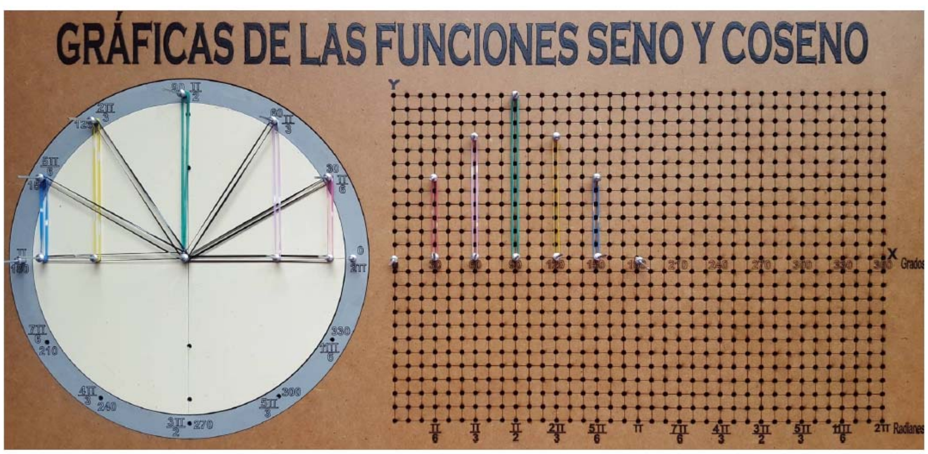


Figura 36. Construcción de la gráfica de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

71

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

• ¿Cuál es la longitud de la línea seno para el ángulo de 0°?
La longitud es igual a cero, ya que su ordenada es también es cero.
• ¿Qué sucede con la línea seno del ángulo de 30°, respecto al de 60°?
La línea del seno en 60° aumenta su longitud respecto a la de 30°.
• ¿Cuál es la longitud de la línea seno para el ángulo de 90°?
La línea seno es igual a 1, debido a que coincide con el radio del círculo unitario.
• ¿Qué sucede con la línea seno en los ángulos de 120° y 150° respecto al de 90°?
Las líneas de los ángulos de 120° y 150°, empiezan a decrecer por lo que tienen menor longitud respecto a la de 90°.
• ¿Cuál es la longitud de la línea seno para el ángulo de 180°?
La longitud es igual a cero, ya que a partir del ángulo de 90° su ordenada decrece hasta 180°, por lo que es igual a cero.

3. Continuar con el mismo procedimiento a partir del ángulo de 180° hasta 360°. (Observar Figura 37)

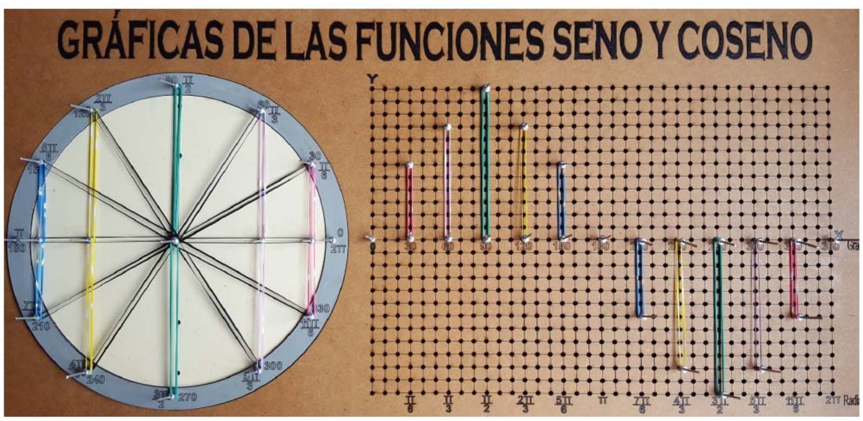


Figura 37. Construcción de la gráfica de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

• ¿Qué sucede con la curva de 0° a 90°?
La curva presenta un comportamiento creciente.
• ¿Qué sucede con la curva de 90° a 180°?
La curva presenta un comportamiento decreciente.
• ¿Qué sucede con la curva de 180° a 270°?
La curva presenta un comportamiento decreciente.
• ¿Qué sucede con la curva de 270° a 360°?
La curva presenta un comportamiento creciente.

4. Unir con ligas los extremos de cada segmento e identificar la curva que se formó.

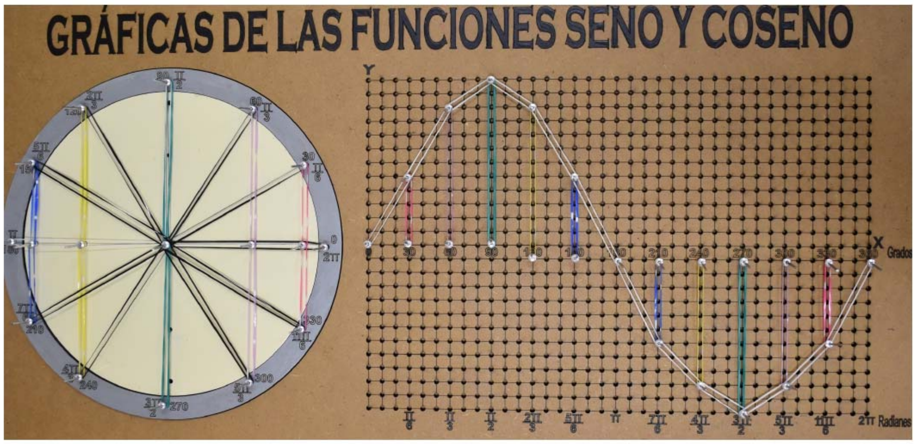


Figura 38. Construcción de la gráfica de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Conclusiones:

Se sugiere realizar las siguientes preguntas, luego de haber culminado la actividad y luego socializar las respuestas correctas

•¿Cuál es el punto máximo de la curva y cuál es el mínimo?
El punto máximo es (0 ; 1), y el punto mínimo es (0 ; - 1).

•¿Cuáles son los ángulos en los que la curva vale cero?
En los ángulos de 0°, 180° y 360°.

•¿Cuál es el nombre de la curva que representa la función seno?
La curva recibe el nombre de sinusoidal.

•¿Cuál es el dominio de la función seno?
El dominio es R, ya que está definida para todos los números reales.

•¿Cuál es el rango de la función seno?
El recorrido es [-1 ; 1]

• ¿La función seno es períodica?
Si, debido a que su período es 2π.

•¿La función seno es par o impar?
Es una función impar, debido a que sen(-x) = sen x, por tanto la gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen.

Gráfica de la función seno

Fundamentación teórica

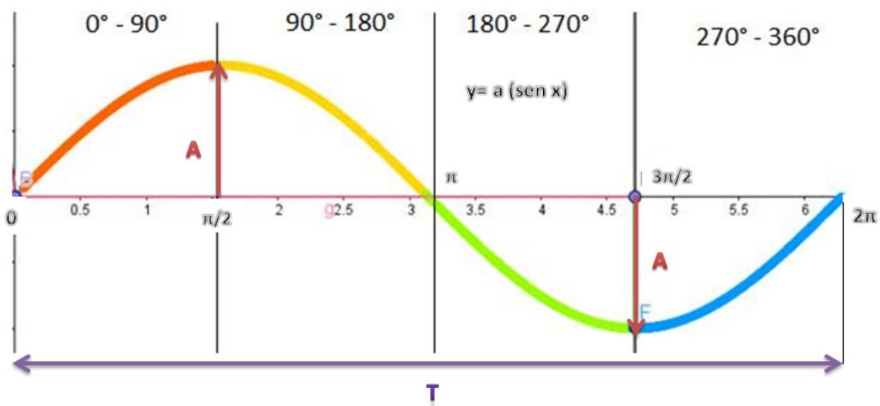


Figura 39. Análisis de la curva de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

La curva de la gráfica de la función seno muestra un comportamiento en el que se puede observar que de 0° a 180° es positiva, mientras, que de 180° a 360° es negativa.

En el círculo trigonométrico de la Figura 40, se puede observar un triángulo rectángulo OBQ y el ángulo α formado por los puntos BOQ. Para hallar la función seno del ángulo α es igual al cateto opuesto (OB) sobre la hipotenusa (1), que es el radio del círculo, es decir:

$\text{sen } \alpha = BQ/1$
$\text{sen } \alpha = BQ/1$
$\text{sen } \alpha = BQ$

74

Gráfica de la función seno

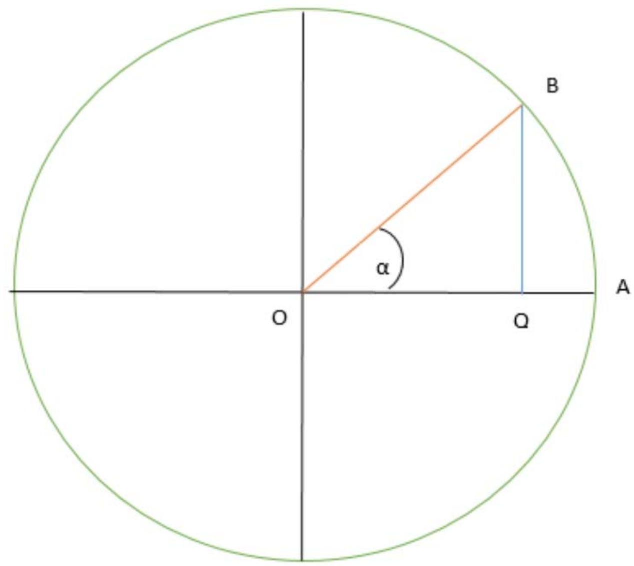


Figura 40. Triángulo rectángulo en el círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Por tanto el segmento BQ sería la longitud vertical de la función seno.

Características de la función seno

$$\boxed{y = \text{sen } x}$$

- **Dominio:** el conjunto de todos los números reales
- **Rango:** [-1, 1]
- **Período:** 2π

75

Gráfica de la función seno

$$y = A \text{ sen } (Bx + C) + D$$

Parámetros de la función

La gráfica de la función y = A sen (Bx + C) + D, presenta diferentes parámetros donde A, B, C y D son constantes. A continuación se realizará una compración entre la ecuación general y otra en donde varien cada uno de dichos parámetros:

Amplitud (A)

Se define como los valores máximo y mínimo.

Ejemplo: Graficar las siguientes funciones

1) y = sen x

2) y = 2 sen x

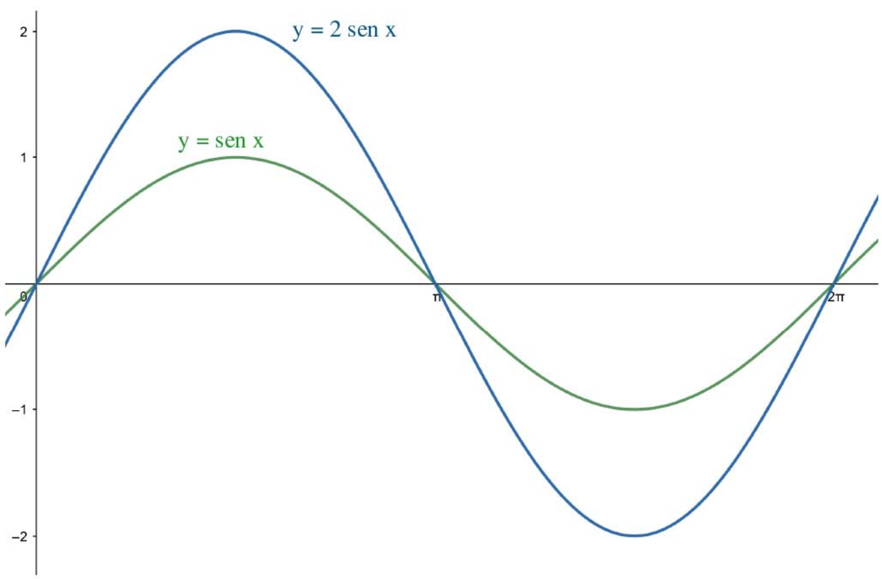


Figura 41. Amplitud de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la ecuación y= sen x la amplitud es igual a 1, mientras que en la ecuación y = 2 sen x la amplitud es igual a 2, debido a que el punto máximo es 2.

76

Gráfica de la función seno

Frecuencia (b)

Guia el grado repetición de la curva de la función en un período de 2π.

Ejemplo: Graficar las siguientes funciones

$y = \text{sen } x$

$y = \text{sen } 3x$

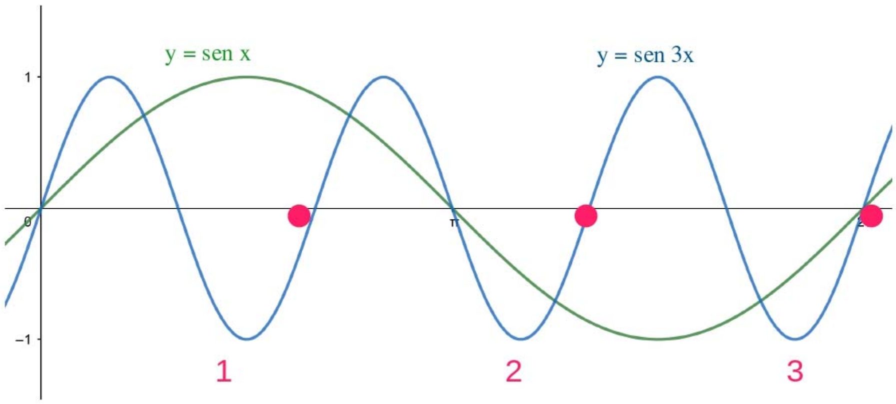


Figura 42. Frecuencia de la gráfica de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la ecuación $y = \text{sen } x$ se puede observar que la curva se repite una sola vez de 0 a 2π, mientras que en la ecuación $y = \text{sen } 3x$, se observa que la curva se repite tres veces en el mismo período.

Desfase (C)

Es el desplazamiento horizontal de la función, y de acuerdo al signo, si es positivo implica que la función se adelanta (o sea, se corre a la izquierda) y si es negativo implica que la función se atrasa (o sea, se corre a la derecha). El número C / B es un desplazamiento horizontal de la función seno llamado desfase o desplazamiento de fase.

En general, si $y = A \text{ sen } (Bx + C)$, entonces a es la amplitud, $2\pi/B$ es el período y C / B es el desplazamiento o desfase

77

Gráfica de la función seno

Ejemplo 1: Graficar las siguientes funciones

y = sen x   C = 0   B = 1   C / B = 0

y = sen (x- π/2)   C = - π/2   B = 1   C / B = - π/2

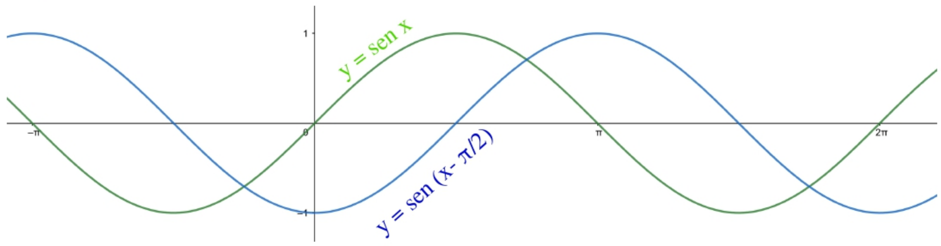


Figura 43. Desfase de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la gráfica de la función y = sen(x - π/2) "C" es negativo, por tanto se obtiene trasladando hacia la derecha π/2 unidades de la gráfica de la función y = sen x.

Ejemplo 2:   y = sen x
                    y = sen (x + π/2)

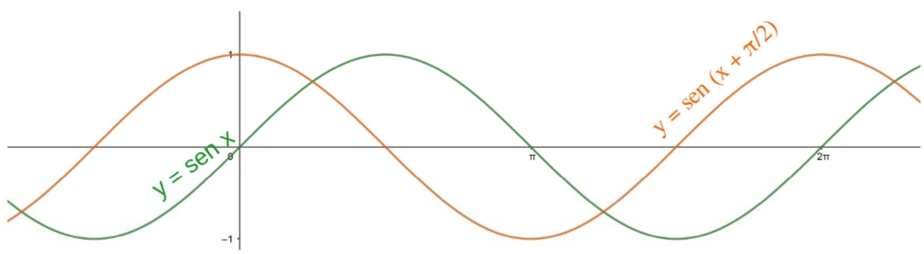


Figura 44. Desfase de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la gráfica de la función y = sen(x + π/2) "C" es positivo, por tanto se obtiene trasladando hacia la izquierda π/2 unidades de la gráfica de la función y = sen x.

78

Gráfica de la función seno

Desplazamiento vertical (D)

Si el signo del desplazamiento es positivo, la gráfica se trasladará hacia arriba y si es negativo se trasladará hacia abajo.

Ejemplo: y = sen x

y = sen (x) + 1

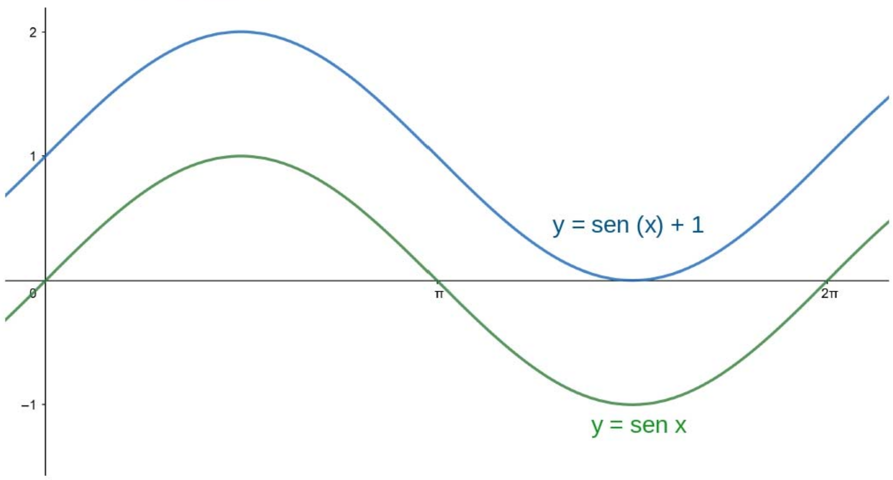


Figura 45. Desplazamiento vertical de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la ecuación y = sen x se observa que la curva inicia en el origen del plano cartesiano, debido a que no tiene desplazamiento vertical, mientras que en la ecuación y = sex (x) + 1 la curva inicia en el punto (0 , 1) porque se traslada hacia arriba 1 unidad, debido a que el desplazamiento vertical es igual a 1 y es positivo.

Para hallar el período se tiene la siguiente ecuación:

Periodo T= $2\pi/b$, donde $b > 0$

79

Gráfica de la función seno

Ejercicio modelo

Determine la amplitud y el período de la función y = 3 sen x. Luego construya la gráfica.

En la función y = 3 sen x se indentifican los parámetros "A" y "B", A = 3 y B = 1, a patir de su ecuación general y = A sen (Bx + C) + D

- **Amplitud: A = 3** Se reemplaza el valor de la amplitud
- **Período: T= 2π/1 = 2π** Se reemplaza el valor de b en la expresión de T.

- **Para hallar los cortes con el eje x utilice la siguiente ecuación:**

x = nπ, n entero

Por tanto:

n= 1 , x = 1(π) = 3.14

n= 2, x = 2(π) = 6.28

- **Para hallar el corte con el eje y:**

y(0)= sen(0)

y(0)= 0, por tanto no corta el eje y

Luego, para realizar el bosquejo de la gráfica de la función y = 3 sen x, se ubica en el eje y el valor máximo y mínimo, es decir, 3 y -3 , las intersecciones con los ejes.

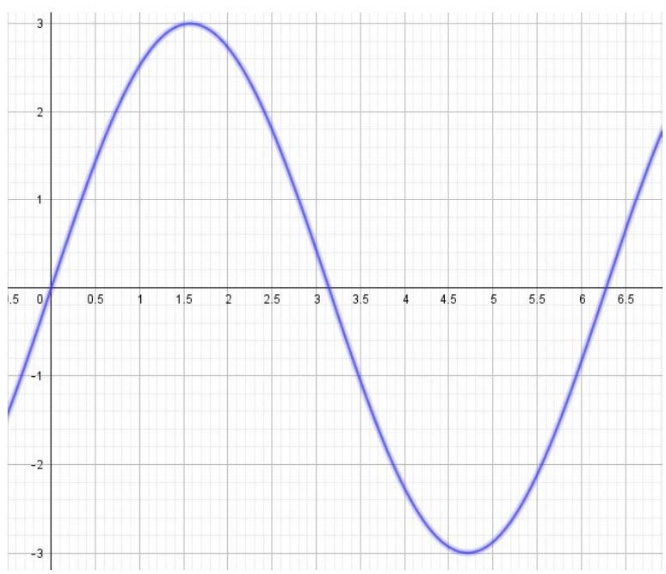


Figura 46. Ejemplo de la gráfica de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

80

Gráfica de la función seno

Resuelva el siguiente ejercicio

Dada la función sinusoidal $y = 1/2 \text{ sen}(2x + \pi/2)$, determine la amplitud, el período y realice la gráfica.

Resolución:

• Comparando con la ecuación general $y = A \text{ sen } (Bx + C) + D$, se puede determinar los valores de cada parámetro, por tanto se tiene:
$A = 1/2$ $B = 2$ $C = \pi/2$

• Luego, se determina el período:
$P = 2\pi / B$ Ecuación del período
$P = 2\pi / 2$ Se reemplaza el valor de B
$P = \pi$

• Para conocer los cortes con el eje x, se procede de la siguiente manera:
$x = n\pi$; $2x + \pi/2 = n\pi$ Se iguala el argumento de la función a nπ
$x = (n\pi - \pi/2)/2$
$n = 0$, $x = -\pi/4$
$n = 1$, $x = \pi/4$
$n = 2$, $x = 3\pi/4$

• Para hallar el desplazamiento horizontal, se utiliza la ecuación del desfae
$C / B = (\pi/2) / 2$
$C / B = \pi / 4$, debido a que C tiene signo positivo la gráfica se traslada horizontalmente $\pi/4$ hacia la izquierda.

• Ahora se busca el corte con el eje "y":
$y = 1/2 \text{ sen}(-2x+\pi/2)$
$y(0) = 1/2 \text{ sen}(-2(0)+\pi/2)$ Se reemplaza x por el valor de 0
$y(0) = 1/2 \text{ sen}(\pi/2) = 1/2\,(1)$, por tanto la gráfica corta el eje y en 1/2

Luego, de hallado todos los datos se procede a realizar el bosquejo de la gráfica:

Gráfica de la función seno

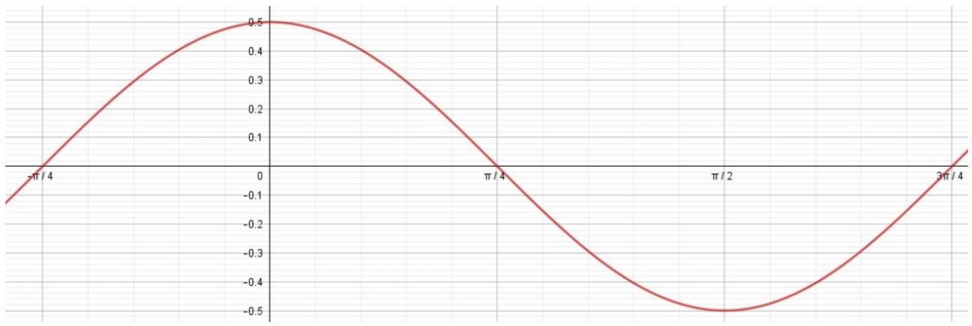


Figura 47. Ejemplo de gráfica de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Conclusión

- El dominio de la función son los números reales.
- El rango de la función es [- 0.5 ; 0.5]
- Período es π.

¿ Sabías qué?

Fénomenos periódicos

Los latidos del corazón visualizados a través de electrocardiogramas se traducen en gráficos de curvas, que siguen un patrón, característica de las gráficas de las funciones trigonométricas.

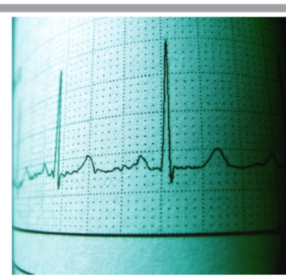


Figura 48. Gráfico de latido del corazón.
Fuente: Canva

82

Gráfica de la función seno

Problema de aplicación

Un modelo matemático para la corriente I (en amperes) en un alambre de un circuito de corriente alterna está dado por $I(t) = 30 \text{ sen } 120\pi t$, donde t es el tiempo medido en segundos. Trace un ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

Amplitud de la corriente: A = 30
Periodo: $T = 2\pi/B$
$T = 2\pi/120$
$T = 1/60$
La gráfica de la función será sobre el intervalo [0, 1/60]

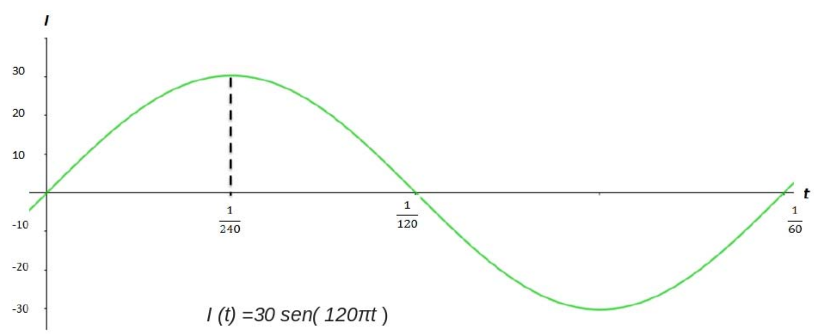


Figura 49. Gráfica de ejercicio de aplicación de corriente alterna.
Fuente: Zill & Wright.(2011).CÁLCULO Trascendentes tempranas.
México. McGraw-Hill/Interamericana Ediotres.

A partir de la gráfica se puede observar que el valor máximo de la corriente es $I = 30$ amperes y ocurre en el intervalo [0, 1/60] en t = 1/240 debido a que:

$$I\,(1/240) = 30 \text{ sen } (\,120\pi.\ 1/240\,) = 30 \text{ sen } (\,\pi/2\,) = 30$$

83

Actividad previa para la siguiente clase

Se sugiere que el docente envie a los estudiantes a leer el documento denominado "Las funciones trigonométricas",únicamente las páginas 8-7 y pedirá a los alumnos que contesten las siguientes preguntas, para lo cuall deben ingresar al siguiente link: http://cimanet.uoc.edu/cursMates0/IniciacionMatematica/pdf/C%2025Las%20funciones%20trigonometricas.pdf

Cuestionario

Conteste las siguientes preguntas:

• ¿Cuál es el dominio y el rango de la gráfica de la función coseno?
……………………………………………………………………………………………..
…………………..
....

• ¿Por qué es importante emplear el círculo trigonométrico para graficar esta función?
……………………………………………………………………………………………..
………………….................…………………………………..………

• ¿Qué semejanzas cree usted que hay entre la gráfica de la función seno respecto a la gráfica de la función coseno?
……………………………………………………………………………………………..
………………………………………………………………………………...………

• ¿El coseno es una función periódica? Justifique su respuesta.
……………………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………..………

84

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad individual: Hoja de trabajo.

REFUERZA TU CONOCIMIENTO

1. Complete los espacios:

- La *amplitud* de una curva del seno representa la mitad de la distancia entre los valores máximos y mínimos de dicha función.
- Dada la función y = a sen (bx + c), c / b representa el *desplazamiento horizontal o desfase* de la gráfica de la función.
- Dada la función y = a sen (bx + c) + d, d representa el *desplazamiento vertical* de la gráfica de la función.

2. Complete la siguiente tabla sobre las características de la función y = sen x.

Máximo: **[π/2, 1]**
Mínimo: **[3π/2, - 1]**
Dominio: **Números reales**
Rango: **[-1, 1]**
Período: **2π**

3. Con la ayuda de la gráfica de la función seno escriba cual es el valor del seno de los siguientes ángulos.

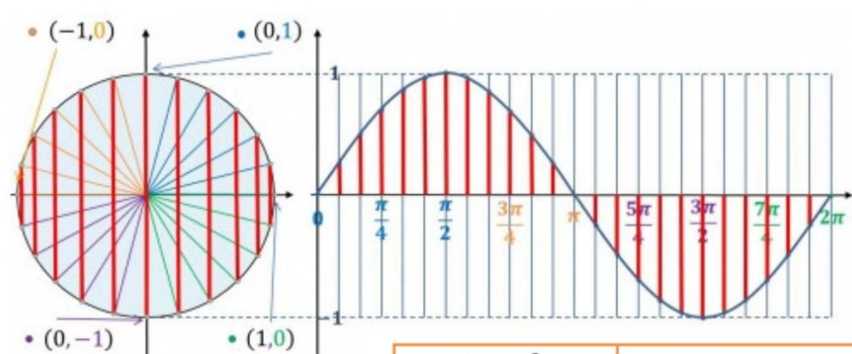


Figura 50. Gráfica de la función seno en el círculo trigonométrico.
Fuente: Gráficas funciones trigonométricas. L2DJ Temas de Matemáticas INC,2011.

sen 0	0
sen π/2	1
sen π	0
sen 3π/2	- 1
sen 2π	0

85

4. Escriba la función que represente la siguiente gráfica y determine el recorrido, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos máximos y mínimos. Considere el intervalo [-2π, 2π].

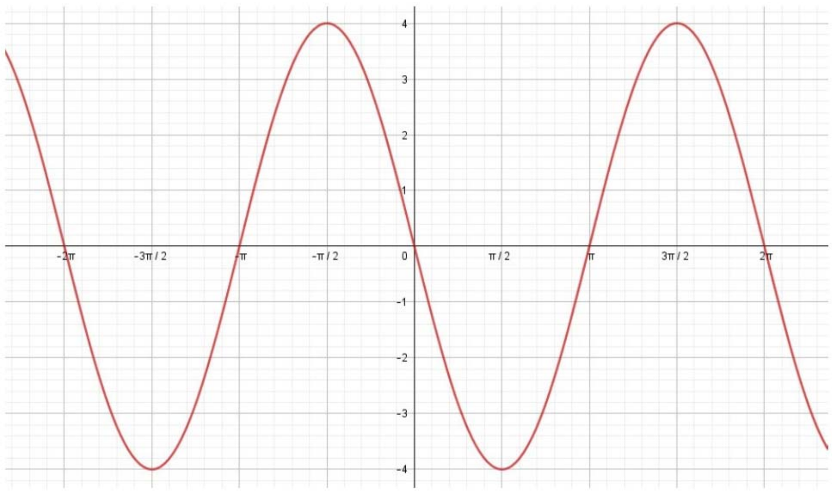


Figura 51. Gráfica de la función seno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Función: **$y = 4 \, sen \, (x - \pi)$**

Dominio: **Números reales**

Rango: **[-4, 4]**

Periodó: **2π**

86

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSENO

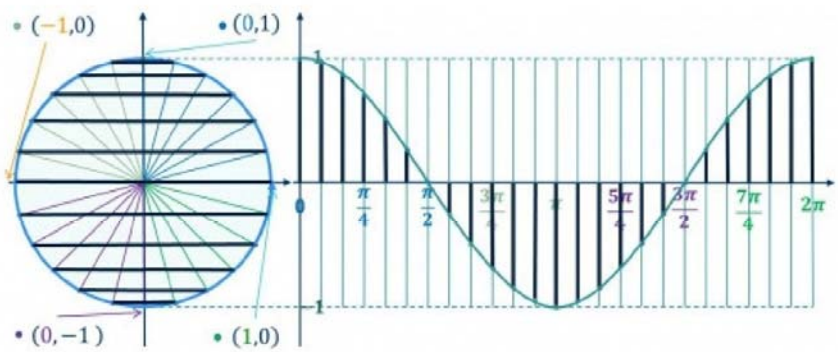


Figura 52. Gráfica de la función coseno
Fuente: Gráficas funciones trigonométricas. L2DJ
Temas de Matemáticas INC,2011.

OBJETIVOS

- Conocer qué es la función coseno.
- Construir y analizar la gráfica de la función coseno.
- Identificar las características de curva de la función coseno

LOGROS DE APRENDIZAJE

- **Define la función coseno a partir del círculo trigonométrico.**
- **Identifica su respectiva gráfica a partir del ánalisis de sus características particulares.**

CLASE Nº3
Gráfica de la función coseno

ANTICIPACIÓN: Sesión 3: Duración 2 horas.

Actividad individual: Clase invertida

PREREQUISITOS:

El docente puede realizar al inicio de la clase las siguientes preguntas exploratorias a diferentes estudiantes con el fin de verificar que hayan contestado el cuestionario previamente planteado.

Recuerde que:
$2\pi = 360°$

PREGUNTAS EXPLORATORIAS:

¿Cuáles son las características (dominio, rango) de la gráfica de la función coseno?
El dominio son todos los números reales, el rango es [-1 ; 1].

¿La función coseno es par o impar?
La función es par, debido a que cos (-x) = cos x, por lo tanto es simétrica al eje y.

¿Qué semejanzas hay entre la gráfica de la función seno respecto a la gráfica de la función coseno?
Las dos funciones tienen el mismo dominio, rango y período.

¿La función coseno es periódica? Justifique su respuesta.
Si, debido a que la gráfica de la función coseno se repite cada 2π.

Recuerde que:
El coseno de un ángulo es igual al cociente entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

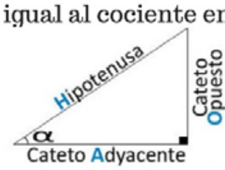


Figura 53. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
Fuente: https://matemovil.com/razones-trigonometricas-en-el-triangulo-rectangulo-ejercicios-resueltos/

89

Explicación previa a la actividad de construcción de la gráfica de la función coseno:

En el círculo trigonométrico de la Figura 54, se puede observar un triángulo rectángulo OBQ y el ángulo α formado por los puntos BOQ. Para hallar la función coseno del ángulo α sería igual a:

$\cos \alpha = OQ / OB$

$\cos \alpha = OQ / 1$

$\cos \alpha = OQ$

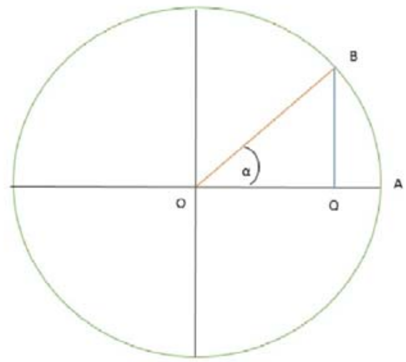


Figura 54. Triángulo rectángulo en el círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Por tanto el segmento OQ seria la longitud horizontal de la función coseno.
Cuando se hace girar los puntos B,C, D, E, etc; de la Figura 55 se forman diferentes triángulos rectángulos como COP, EON, FOM, etc., los cuales muestran el valor del coseno de los diferentes ángulos que van desde 0° a 360°.

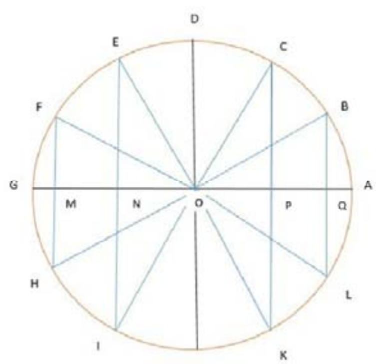


Figura 55. Triángulos rectángulos en el círculo trigonométrico.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Para realizar la gráfica de la función coseno, a partir del círculo trigonométrico se traslada al plano cartesiano las longitudes que toman los segmentos como OA, OQ, OP, etc. en donde el eje de las abscisas esta divido en ángulos de 0° a 360° y las ordenadas son las longitudes que toman dichos segmentos, estos puntos formarán la gráfica de la función coseno.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad grupal: Trabajo cooperativo.

Aprendamos haciendo

El procedimiento para construir la curva de la función coseno es similar a la de la función seno, pero cabe resaltar que las dos funciones están desfasadas 90°,esto es cos x = sen (x + π/2), por lo que en el tablero de gráficas de las funciones seno y coseno se debe girar 90°en sentido antihorario la parte exterior del círculo, ayudando a graficar la función coseno en el plano cartesiano.

Los materiales a usar son los siguientes:

* Tablero de las gráficas de las funciones seno y coseno
* Remaches
* Ligas

Procedimiento

1. A partir de la fundamentación teórica se conoce que el coseno de 0° es igual a 1, ya que coincide con el radio del círculo trigonométrico, por dicha razón la longitud de la función coseno va desde el origen hasta el ángulo de 0°. Es así que se debe girar 90° la circunferencia a partir del origen y dicha longitud se trasladará al plano cartesiano en el ángulo correspondiente.

Figura 56. Tablero de las funciones seno y coseno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

2. A continuación, se debe construir un triángulo rectángulo en los ángulos de 30°, 60º y 90º, luego trasladar las longitudes que representa la función coseno al plano cartesiano en los ángulos correspondientes.

91

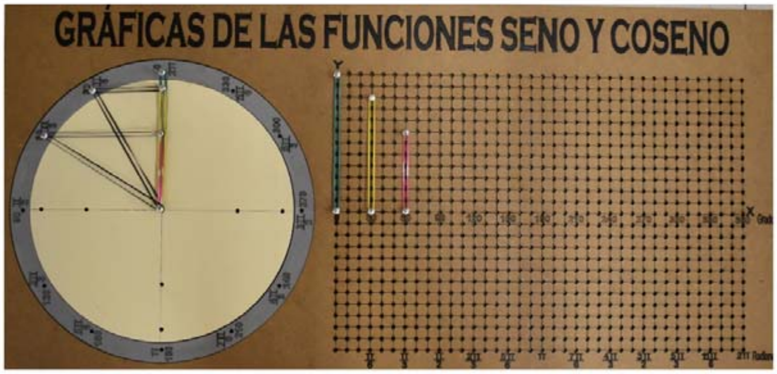


Figura 57. Construcción de la gráfica de la función coseno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucede con la línea coseno del ángulo de 30°, respecto al de 60°?

La línea del coseno en 60° disminuye su longitud respecto a la de 30°.

- ¿Cuál es la longitud de la línea coseno para el ángulo de 90°?

La longitud de la línea coseno es igual a cero, ya que a partir del ángulo de 0° su ordenada decrece.

3. Continuar con el mismo procedimiento a partir del ángulo de 90° hasta 180°.

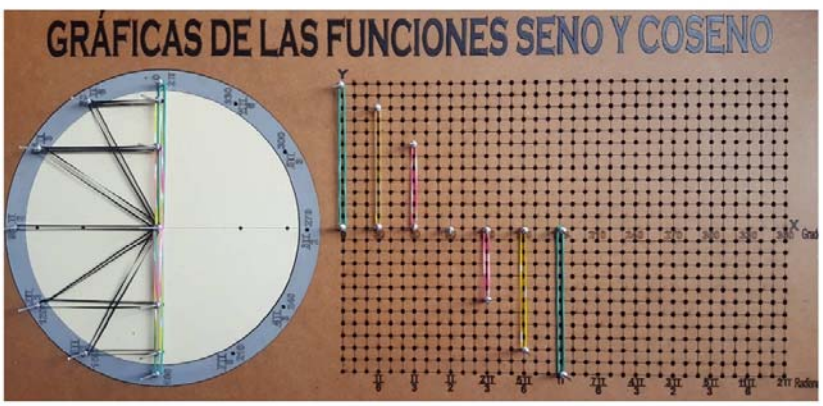


Figura 58. Construcción de la gráfica de la función coseno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucede con la longitud de la línea coseno en los ángulos de 120° y 150° con respecto al de 90°?

Las líneas de los ángulos de 120° y 150°, empiezan a crecer por lo que tienen mayor longitud respecto a la de 90°.

- ¿Cuál es la longitud de la línea coseno para el ángulo de 180°?

La longitud es igual a uno, ya que coincide con el radio de la circunferencia.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Fundamentación teórica

Se tiene la función y = A cos (Bx + C) + D, considerando B>0, la cual es similar a la función general de seno, por tanto se tiene:

A: es la amplitud

B: es la frecuencia

C: es el desplazamiento horizontal

D: es el desplazamiento vertical

Período P = 2π / B

Cortes con el eje x: x = (2n + 1)π/2, donde *n* es un número entero

Ejemplo:

Se realizará este ejercicio modelo en la pizarra.

Dada la funcion y = 3/2.cos(x/2 -π/4), construya su gráfica.

Procedimiento:

Comparando con la ecuación general y = A cos (Bx +C) + D,se tiene:

A = 3/2 B = 1/2 C = -π/4

Luego, se determina el período

P = 2π/B Ecuación del período

P = 2π/1/2 Se reemplaza B

P = 4π

Para saber el corte inicial con el eje "x", se procede de la siguiente manera:

x = (2n + 1)π/2 ; x/2 - π/4 = (2n + 1)π/2 Se iguala el argumento de la función con la ecuación de las intersecciones

x = (2n + 1)π + π/2 Se despeja x

n= - 1; x = - π/2

n = 0; x = 3π/2

n = 1; x = 7π/2

Ahora se buscará el corte con el eje "y"

y = 3/2 cos(x/2 - π/4)

y(0) = 3/2 cos(0/2-π/4) Se reemplaza x por 0

y(0)= 3/2 cos(-π/4)

y(0)= 3/2(√2/2)

El corte con el eje y es en el valor de 1.06

Se halla el desafase:

C / B = (-π/4)/(1/2)

C / B = - π/2, por tanto la gráfica de desplaza horizontalmente hacia la izquierda π/2

94

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

4. Continuar con el mismo procedimiento a partir del ángulo de 180° hasta 360° y unir los extremos de cada segmento con ligas.

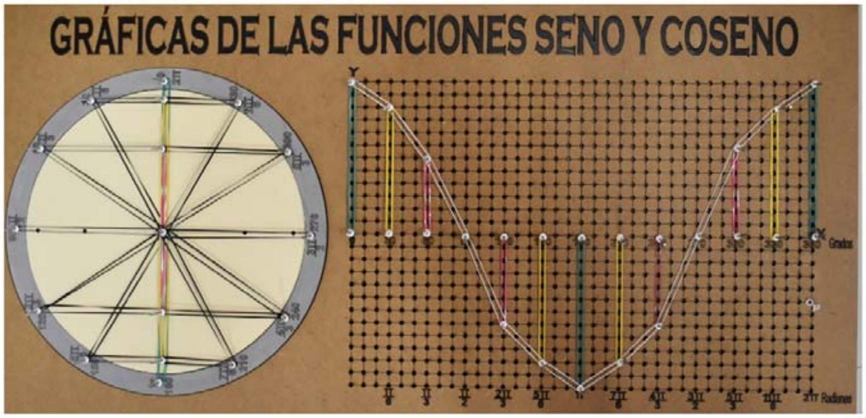


Figura 59. Construcción de la gráfica de la función coseno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucede con la curva de 180° a 360°?

La curva presenta un comportamiento creciente.

- ¿Qué sucede con la curva de 90° a 180°?

La curva presenta un comportamiento decreciente.

- ¿Qué sucede con la curva de 180° a 270°?

La curva presenta un comportamiento de creciente.

- ¿Qué sucede con la curva de 270° a 360°?

La curva presenta un comportamiento creciente.

Conclusiones:

Estas preguntas se realizarán a los estudiantes después de haber terminado la actividad.

- ¿Qué sucede con la curva de 0° a 180° y de 180°a 360°?

La curva de 0° a 180° es decreciente y de 180° a 360° es creciente.

- ¿Cuál es el punto máximo de la curva y cuál es el mínimo?

El punto máximo es [0, 1] y el punto mínimo es [π ; - 1].

- ¿Cuáles son los puntos en qué la curva vale cero?

La curva es cero el 90° y 270°.

- ¿Cuál es el dominio de l función coseno?

El dominio es el conjunto de los números reales.

- ¿Cuál es el rango de la función coseno?

El rango es [-1 ; 1].

- ¿Qué pasaría si los ángulos son mayores que 360°?

La curva se repetiría cada 2π, es decir la función coseno es periódica.

93

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Con los datos obtenidos se realiza el bosquejo de la gráfica de la función:

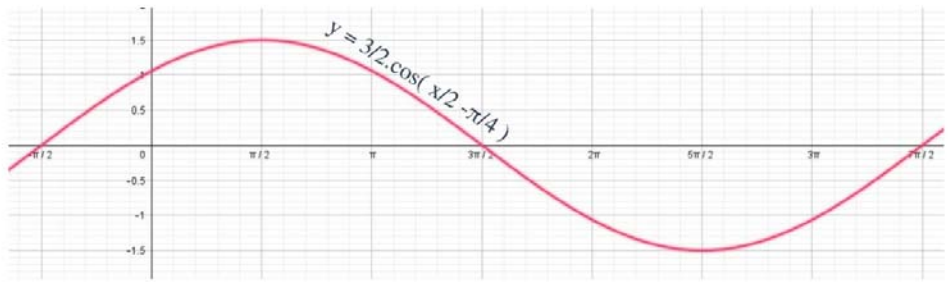


Figura 60. Ejemplo de la gráfica de la función coseno
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

En conclusion:

- Dominio: Números reales
- Rango: [- 3/2 ; 3/2]
- Período: 4π

Preguntas de refuerzo

A partir del ejemplo los estudiantes deben responder las siguientes preguntas

- ¿Qué sucede con la función coseno si se multiplica por distintos números?
  La amplitud de la función cambia de acuerdo al número que se multiplique.
- ¿Qué efecto se produce sobre la función coseno cuando sumamos un ángulo a la variable independiente?
  La función se traslada sobre el eje x, n unidades hacia la izquierda.
- ¿Qué efecto se produce sobre la función coseno cuando restamos un ángulo a la variable independiente?
  La función se traslada sobre el eje x, n unidades hacia la derecha.
- ¿Qué efecto se produce sobre la función seno o coseno cuando multiplicamos por un número la variable independiente?
  La función puede estirarse o comprimirse n unidades.

95

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Problema de aplicación

- Un objeto que pesa W libras está suspendido del techo por un resorte de acero(observe la figura). El peso se jala hacia abajo (dirección positiva) a apartir de su posición de equilibrio y se libera. El movimiento resultante del peso está descrito por la función y = 4 cos (4t), donde y es la distancia (en pies) y t es el tiempo (en segundos)

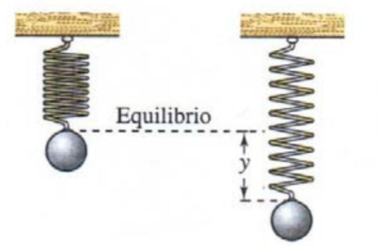


Figura 61. Ejercicio del movimiento armónico
Fuente: Larson y Falvo (2011).*Trigonometría*.Mexico: Cengage Learning.

Comparando con la ecuación general y = A cos (Bx +C) + D,se tiene:

A = 4 B = 4 C = 0

Luego, se determina el período

$P = 2\pi/ 4$

$P = \pi/2$

Para saber el corte inicial con el eje "x", se procede de la siguiente manera:

$x = (2n + 1)\pi/2$; $4t = (2n + 1)\pi/2$

$t = (2n + 1)\pi / 8$

$n = -1$; $x = -\pi/8$

$n = 0$; $x = \pi/8$

$n = 1$; $x = 3\pi/8$

Ahora se buscará el corte con el eje "y"

$y = 4 \cos(4t)$

$y(0) = 4 \cos(0)$

$y(0)= 4(1)$

$y(0)= 4$

El corte con el eje y es en el valor de 1.06

Se halla el desafase:

C / B = 0, por tanto la gráfica no se desplaza horizontalmente

96

- Una vez obtenidos todos los datos se procede a realizar el bosquejo de la gráfica.

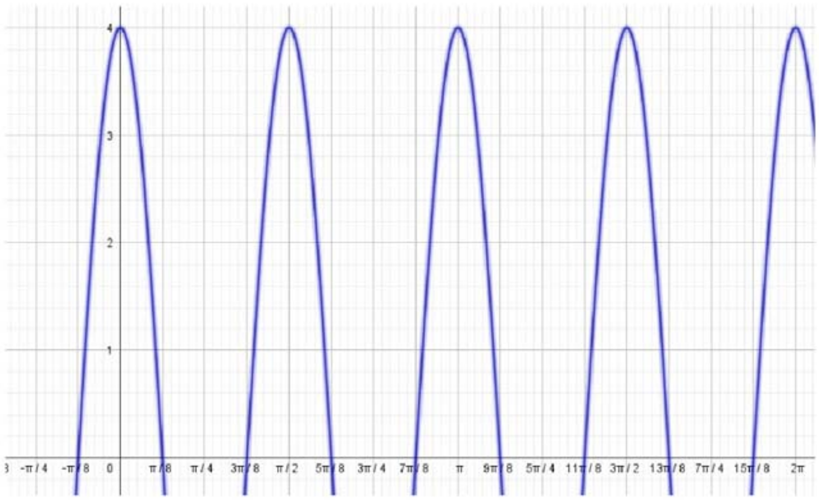


Figura 62. Ejemplo aplicación de la función coseno
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad individual: Hoja de trabajo.

REFUERZA TU CONOCIMIENTO

1.¿Cómo los coeficientes A, B, C y D afectan la función trigonométrica y = A cos (Bx + C) + D?

El coeficiente A cambia la amplitud de la función, B comprime y alarga la función, C desplaza horizontalmente la gráfica de la función y D desplaza verticalmente la función.

2. Complete los espacios:

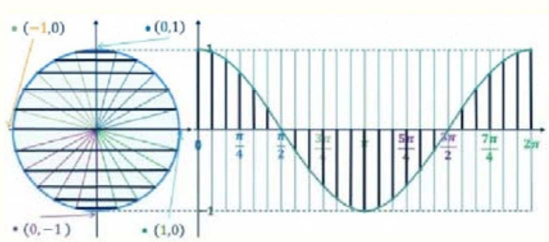
- La curva de la función coseno es simétrica respecto al eje *y* y por tanto es una función *par.*

3. Complete la siguiente tabla:

Características de la función coseno:

Máximo: [0, 1]
Mínimo: [π ; - 1]
Dominio: Los números reales
Rango: [- 1, 1]
Periodo: 2π

4. Con la ayuda de la gráfica de la función coseno escriba cual es el valor del coseno de los siguientes ángulos.



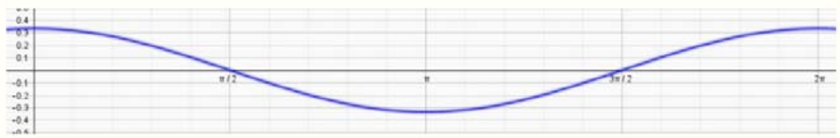
cos 0	1
cos π/2	0
cos π	- 1
cos 3π/2	0
cos 2π	1

Figura 63. Gráfica de la función coseno en el círculo trigonométrico. Fuente: Gráficas funciones trigonométricas. L2DJ Temas de Matemáticas INC,2011

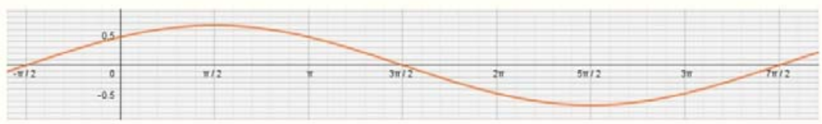
98

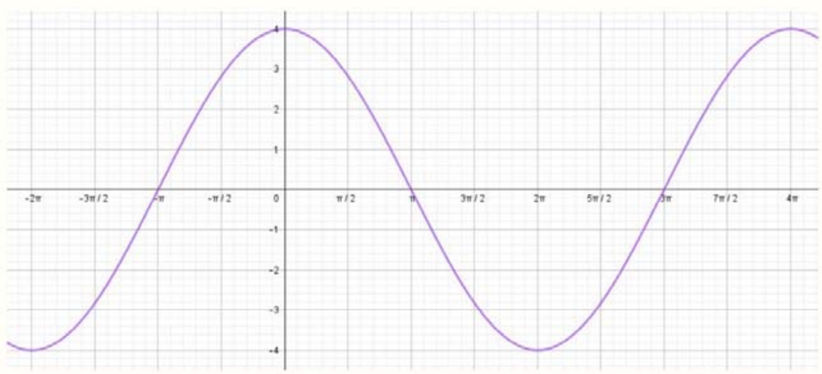
5. Realice las gráficas de las siguientes funciones.

- y = 1/3 cos x



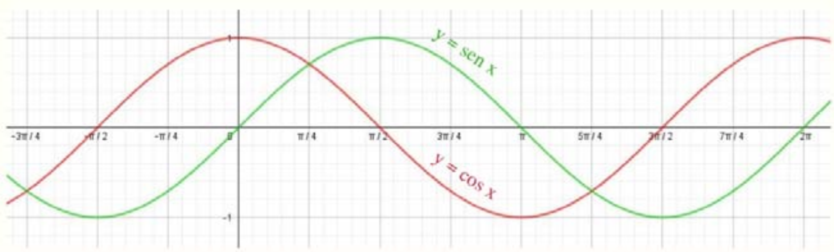
- y =2/3 cos (x/2 -π/4)





99

6. Observe las gráficas de las siguientes funciones y conteste.



[- π / 2 ; 0] , [3π/2 ; 2π].

[π / 2 ; π].

[- 3π /4 ; 0,7] , [π/4 ; 0,7] , [5π/4 ; - 0,7].

100

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TANGENTE

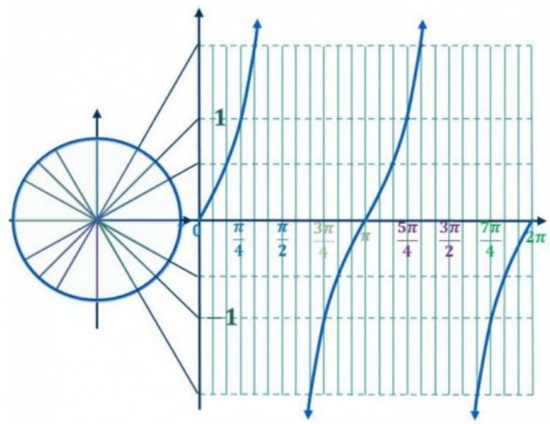


Figura 68. Gráfica de la función tangente del ángulo.
Fuente: Gráficas funciones trigonométricas.
Temas de Matemáticas INC,2011.

OBJETIVOS

- Explicar el proceso para la construcción de la gráfica tangente por medio del círculo trigonométrico.
- Analizar las características de la gráfica de la función tangente.

LOGROS DE APRENDIZAJE

- Reconoce la función tangente a partir del círculo trigonométrico.
- Identifica las características que tiene la gráfica de la función tangente.

101

CLASE N° 4

Gráfica de la función tangente

- El nombre de tangente fue usado por primera vez por Thomas Fincke en 1853, el origen de la palabra tangente se asocia a la recta tangente a una circunferencia y proviene del término en latín tongo que significa toco.

Anticipación: Sesión 4: Duración 2 horas.

Actividad grupal: Lluvia de ideas.

- Para esta actividad el docente dividirá a los estudiantes en grupos de tres y pedirá una idea sobre aspectos de la gráfica tangente como: ángulos, circunferencia, razón trigonométrica y triángulo rectángulo.
- Los grupos deben anotar la idea central de cada exposición de sus compañeros dentro del grupo referente a aspectos de la tangente en una hoja de papel.
- Luego de la socialización se les entregará el esquema mental, que se encuentra en la parte de anexos pág.: 177, para que con una palabra definan las ideas de sus compañeros.

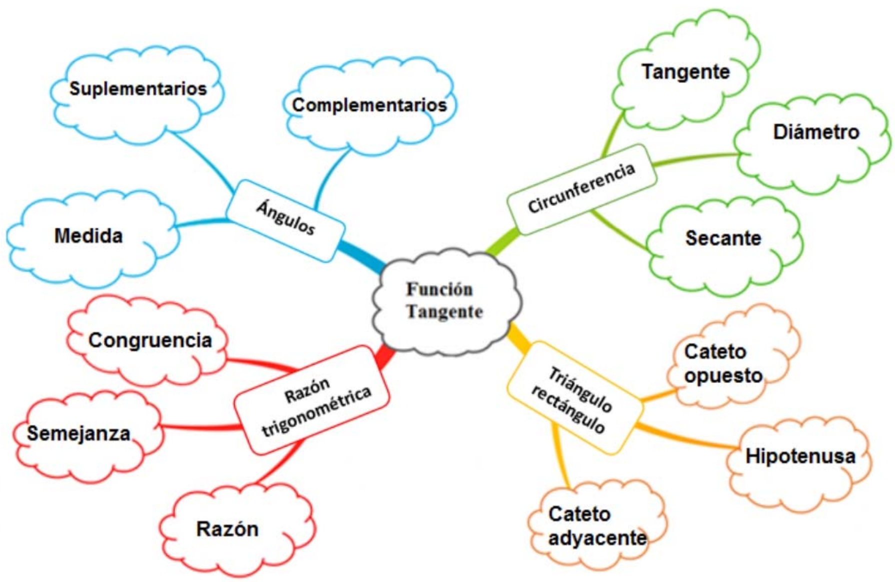


Figura 69. Mapa mental de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

103

CONTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Trabajo grupal: Trabajo dirigido, preguntas generadoras.

Objetivos:

- Construir la gráfica de la función tangente.
- Identificar las características de la función tangente.

Aprendamos haciendo

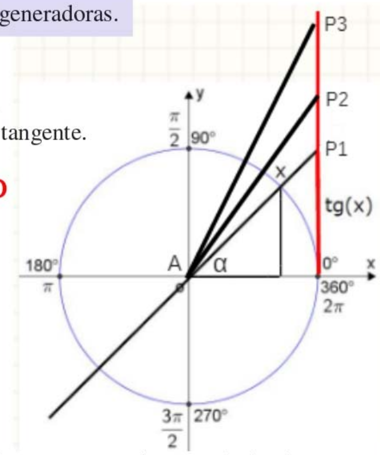


Figura 70. Función tangente.
Fuent: https://historiaybiografias.com/circulo_trigo/

Materiales:

*Tablero de la gráfica de la función tangente.
*Remaches
*Ligas

Procedimiento:

En primer lugar observe el tablero, el cual en la parte izquierda tiene el círculo trigonométrico que esta cortado por una línea tangente al origen de arco, mientras que en la parte derecha se encuentra el plano cartesiano, y posee divisiones de 15° hasta 360°. Antes de empezar, se debe tener presente que el cateto opuesto en cada triángulo rectángulo será la prolongación del ángulo (Figura 66) de que se vaya a trabajar hasta la línea tangente al origen de arco la cual se tomará como punto de referencia para la construcción de la función tangente.

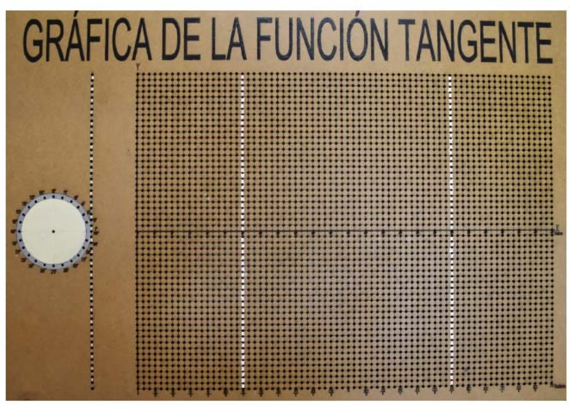


Figura 71. Tablero de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

El procedimiento a seguir es:

1. Formar un triángulo rectángulo en el círculo trigonométrico desde el centro hasta la prolongación de la línea tangente en un valor de 15° con los remaches y las ligas, luego, identificar que parte le corresponde a dicho ángulo en la línea tangente. Trasladar la medida de la línea tangente al plano cartesiano en el ángulo correspondiente. (Observarfigura 68)

104

Figura 72. Construcción de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Cuál es la longitud de la línea tangente para el ángulo de 0°?

La longitud es igual a cero, ya que su ordenada es también es cero.

- En el triángulo rectángulo formado en 15°, ¿que lado representa al seno y al coseno?

El lado formado sobre la línea tangente representa al seno, mientras que la longitud desde el centro del círculo al origen de arcos representa a la línea coseno.

- ¿Cuál es la longitud de la línea tangente para el valor de 0°?

La longitud de la línea tangente es cero.

- ¿En el ángulo de 15° que lado representa la línea tangente?

La línea tangente está representada por la intersección entre la distancia desde el origen de arcos hasta la prolongación de la línea del ángulo de 15°.

2. Continuar con la construcción de triángulos rectángulos para los ángulos de 30°, 45°, 60°, 75° y 90°.

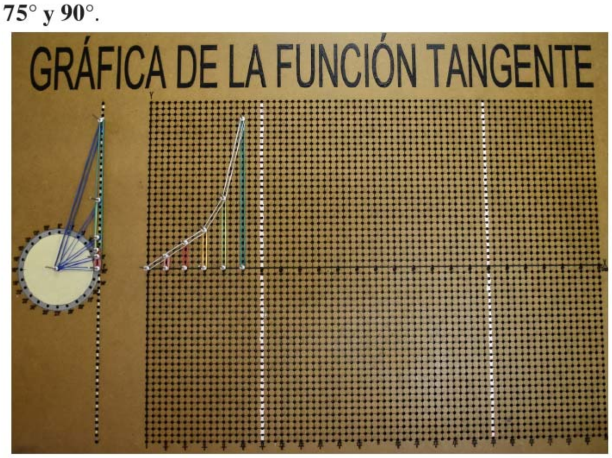


Figura 73. Construcción de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucede con la línea tangente del ángulo de 30°, respecto al de 60°?

La línea tangente en 60° aumenta su longitud respecto a la de 30°.

- ¿Cuál es la longitud de la línea tangente para el ángulo de 90°?

La longitud de la línea tangente no está definida, debido a que en 90° las longitudes de la línea tangente y la línea del ángulo son paralelas, y porque el coseno de 90° es cero y como tan α = sen α / cos α y una división para cero: k/0 es una Ind.

3. Continuar con el mismo procedimiento para el ángulo de 105° hasta 270°.

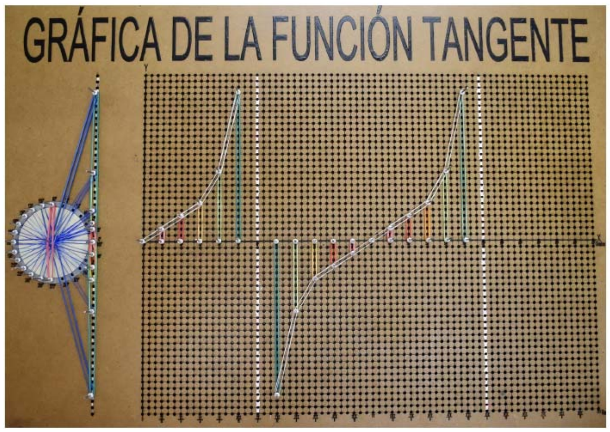


Figura 74. Construcción de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucede con la línea tangente en el valor de 105°?

La línea tangente empieza en la parte inferior del eje de las abscisas, debido a que el signo de la tangente en el segundo cuadrante es negativo.
La longitud de la línea tangente es la prolongación del ángulo a la línea tangente.

- ¿Qué sucede con la línea tangente del ángulo de 120°, respecto al de 135°, 150° y 165°?

La línea tangente presenta un comportamiento creciente.

- ¿Cuál es la longitud de la línea tangente para el ángulo de 180°?

La línea tangente es igual a cero.

- ¿Qué sucede con la longitud de la línea tangente entre los ángulos de 180° hasta 155° ?

La longitud de la línea tangente tiende a crecer.

- ¿Cuál es el signo de la tangente en el tercer cuadrante?

El signo de la tangente es positiva, debido a que la prolongación de los ángulos del tercer cuadrante hasta la línea tangente tangente se convierte en positivo, ya que la línea tangente en este cuadrante el positiva.

- ¿Cuál es la longitud de la línea tangente para el ángulo de 270°?

La longitud de la línea tangente no está definida, debido a que en 270° las longitudes de la línea tangente y la línea del ángulo son paralelas y porque el coseno de 270° es cero y como tan α = sen α / cos α y una división para cero: k/0 es una Ind.

4. Continuar con el mismo procedimiento para el ángulo de 285° hasta 360°. Posterior a esto, analice la gráfica de la función tangente.

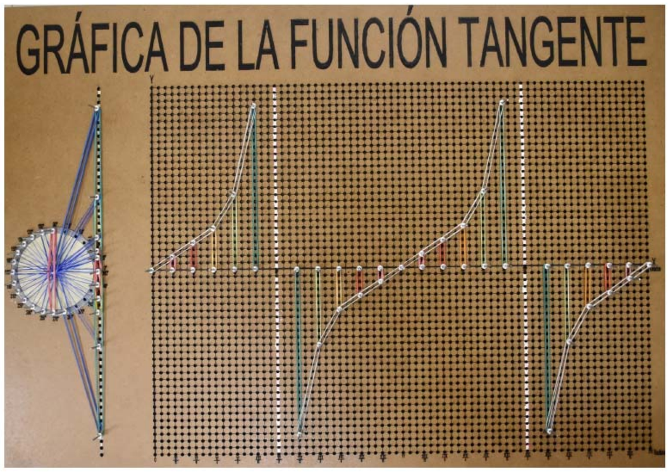


Figura 75. Construcción de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucede con la línea tangente en el valor de 285°?

La línea tangente empieza en la parte inferior del eje de las abscisas, debido a qué el signo de la tangente en el cuarto cuadrante es negativo.

- ¿Qué sucede con la línea tangente del ángulo de 300°, respecto al de 315°, 330° y 345°?

La línea tangente presentan comportamiento creciente.

- ¿Cuál es la longitud de la línea tangente para el ángulo de 360°?

La línea tangente es igual a cero.

- ¿Qué sucede con la longitud de la línea tangente entre los ángulos de 285° hasta 360° ?

La longitud de la línea tangente tiende a decrecer.

- ¿Cuál es el signo de la tangente en el cuarto cuadrante?

El signo de la tangente es negativo, debido a que la prolongación de los ángulos del tercer cuadrante hasta la línea tangente da negativo debido que está en la parte inferior del eje x.

Conclusiones:

Luego de haber culminado la actividad el docente debe realizar las siguientes preguntas generadoras.

1. ¿Qué sucede con la curva de 0° a 90°; de 90°a 270° y de 270º a 360º?

La gráfica tiene un comportamiento creciente.

2. ¿Cuál es el punto máximo y mínimo de la curva?

La curva no tiene punto máximo ni mínimo.

3. ¿Cuáles son los puntos en qué la curva vale cero?

La curva vale cero en 0°, 180°, 360°, etc.

4. ¿Cuáles son las principales características que tiene la gráfica de la función tangente?

Es una función creciente, su periodicidad es cada π, es una función impar.

5. ¿Por qué la gráfica de la función tangente no esta definida para los valores de 90°, 270°, 450°, etc?

Porque el coseno de 90°, 270°, 450°,... es cero y como tan α = sen α / cos α y una división para cero: k/0 es una Ind.

Fundamentación teórica

Función Tangente

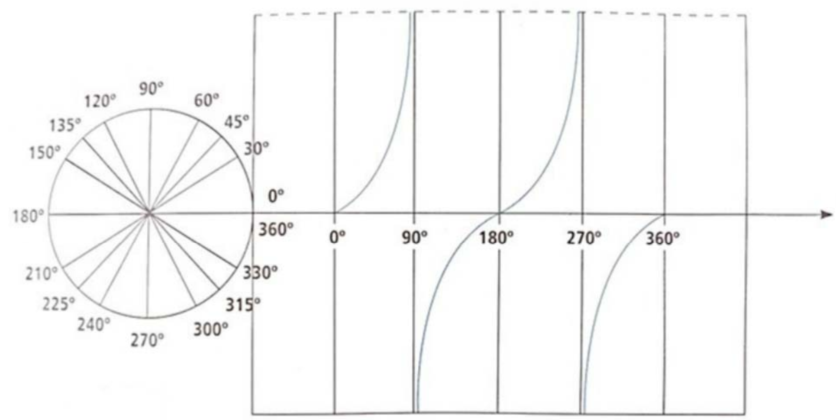


Figura 76. Gráfica de la función tangente.
Fuente: https://cibertareas.info/grafica-de-la-funcion-tangente-matematicas-2.html

La gráfica de la función tangente muestra un comportamiento en el que se puede observar que de 0° a 90° es positiva, mientras, que de 90° a 180° es negativa, y en el valor de 180° a 270° es negativa y en el cuarto cuadrante es positiva.

108

La función tangente es otra de las funciones trigonométricas que a cada valor (en radianes) le hace corresponder su punto coordenado correspondiente. Asimismo se debe recordar que la función tangente es impar. Es decir, tan(-x)= -tan x. En consecuencia, la gráfica de y= tan x es simétrica con respecto al origen. También se conoce a partir de la identidad tan x= sen x / cos x que la tangente está indefinida para los valores en los que cos x= 0. Dos valores son x= ± π/2 ≈ ± 1.5708.

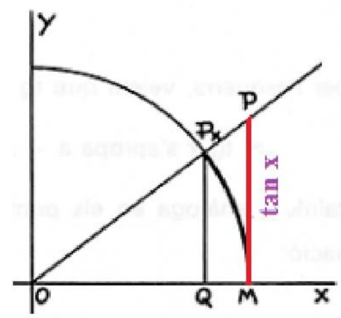


Figura 77. Función tangente.
Fuente: https://historiaybiografias.com/circulo_trigo/

Para representar esta función, debe recurrirse a la interpretación geométrica de la tangente. (Observar figura 73)

En este gráfico puede observarse el primer cuadrante de una circunferencia de radio 1.

El seno del ángulo representado es QP_x, el coseno es OQ y la tangente es MP.

Características de la función tangente

Algunas de las características fundamentales de la función tangente son:

- La imagen de esta función se compone de todos los números reales, positivos o negativos.
- Es una función creciente.
- No tiene ni máximos ni mínimos.
- Su dominio es R - {π/2 + nπ} con n∈ Z.
- Es discontinua en los puntos: π/2 + nπ con n∈Z .
- Puntos de corte con el eje X (nπ, 0) con n∈Z .
- Corta en el origen.
- Es periódica de periodo π.

tan(x)= tan(x+π/2)

La función f(x) = tan(nx) es periódica de periodo p = π / 2n

Para |n|>1 el periodo disminuye y para 0<|n|<1 el periodo aumenta.

- Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.

tan (- x) = - tan (x)

- Es estrictamente creciente en todo su dominio.
- Tiene asíntotas verticales cuando x = π/2 + nπ con n∈Z.
- No está acotada.

109

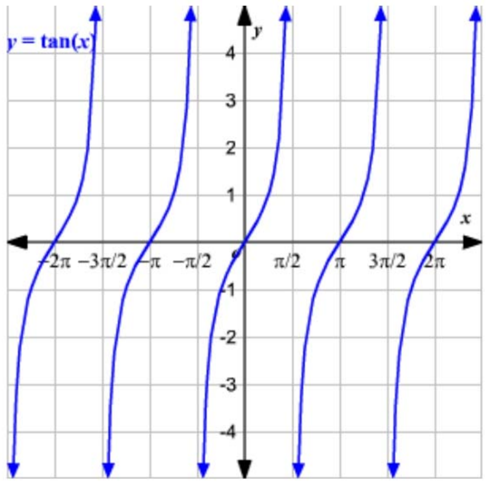


Figura 78. Gráfica de la función tangente.
Fuente: https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/graphing-tangent-function

Propiedades de la función tangente:

- Si x es un número real, entonces:
- I. tan (-x)= - tan x
- II. tan (π/2 - x)= cot x
- III. tan (x + π)= tan x
- IV. tan (π - x)= - tan x

Gráfica de la función tangente

$$\boxed{y = A \tan (Bx + C) + D}$$

Parámetros de la función

- La gráfica de la función y = A tan (Bx + C) + D, presenta diferentes parámetros.

A continuación se realizará una comparación entre la ecuación general y otra en donde varíen cada uno de dichos parámetros:

Amplitud (A):

- Este parámetro cambia el tamaño de la función. Si A >1 se amplifica su forma. Si 0 < A < 1, se hace más pequeña. Si A < 0 entonces se invierte su forma.
- La gráfica de la función tangente tiene amplitud pero no se puede calcular sus máximos ni mínimos, debido a que no es muy perceptible y porque el coseno de los ángulos 90°, 270°, 450°..., es cero una división para cero no está definida (k/0 = Ind.).

Frecuencia (B):

- Modifica el grado de repetición de la función.

110

Gráfica de la función tangente

Ejemplo 1:

- Graficar las siguientes funciones
- **y= tan x**
- **y= tan 2x**

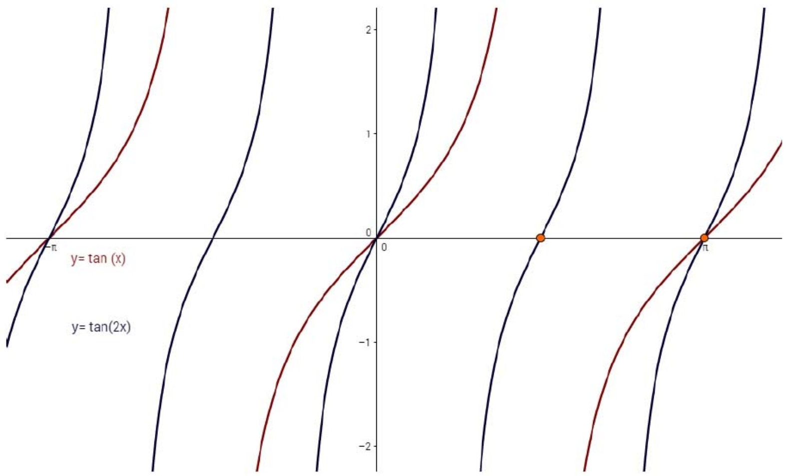


Figura 79. Frecuencia de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis:
En la ecuación **y = tan x** se puede observar que la curva se repite una sola vez de cero a π, mientras que en la ecuación **y = tan 2x**, se observa que la curva se repite dos veces en el mismo periodo.

Desfase (C):
Es el desplazamiento horizontal de la función, y de acuerdo al signo, si es positivo implica que la función se adelanta (o sea, se corre a la izquierda) y si es negativo implica que la función se atrasa (o sea, se corre a la derecha).

> En general, si y = A tan(Bx + C), entonces a es la amplitud, π / B es el período y C / B es el desplazamiento o desfase.

111

Ejemplo 2: Graficar las siguientes funciones

y = tan x	C = 0	B =1	C / B = 0
y = tan (x + π/2)	C = π/2	B = 1	C / B = π/2

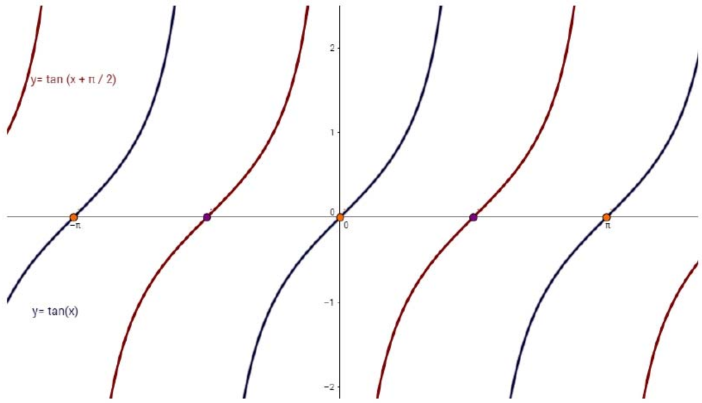


Figura 80. Desfase de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la gráfica de la función y = tan (x + π/2) "C" es positivo, por tanto se obtiene trasladando hacia la izquierda π/2 unidades de la gráfica de la función y = tan x.

Ejemplo 2.1:
y = tan x
y = tan (x + 3π/2)

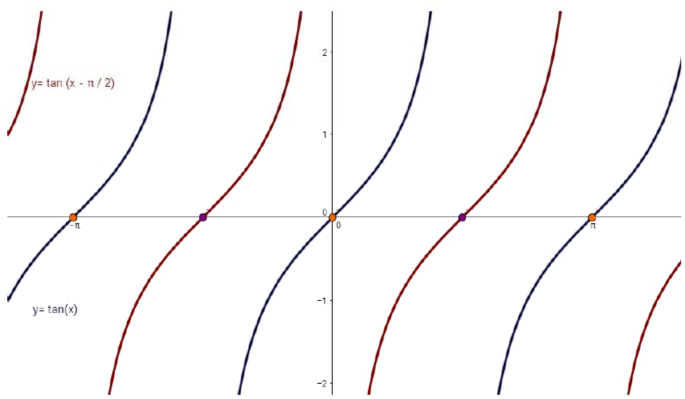


Figura 81. Desfase de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la gráfica de la función **y = tan (x - π/2)** "C" es negativo, por tanto se obtiene trasladando hacia la derecha π/2 unidades de la gráfica de la función **y = tan x.**

112

Desplazamiento vertical (D):
Si el signo del desplazamiento es positivo, la gráfica se trasladara hacia arriba y si es negativo se trasladara hacia abajo.

Ejemplo 3: Gráficar las siguientes funciones.

y= tan x

y = tan (x) + 3

y = tan (x) - 3

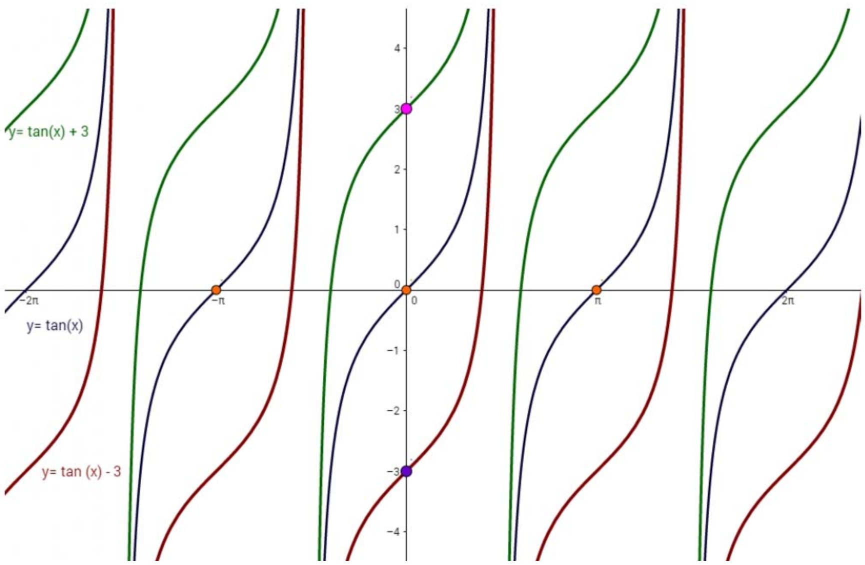


Figura 82. Desplazamiento de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la ecuación **y = tan x** se observa que la curva corta en el origen del plano cartesiano, debido a que no tiene desplazamiento vertical, mientras que en la ecuación **y = tan (x) + 3** la curva corta con el eje y en el punto (0,3) porque se traslada hacia arriba 3 unidades, debido a que el desplazamiento vertical es igual a 3 y es positivo, y cuando la ecuación **y = tan (x) - 3** la curva corta con el eje y en el punto (0,-3) porque se traslada hacia abajo 3 unidades, debido a que el desplazamiento vertical es igual a -3 y es negativo .

Para hallar el período se tiene la siguiente ecuación:
Periodo T= π / B, donde B > 0

113

Ejercicios modelos: CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

1. Determine la amplitud y el período de la función y= tan (x). Luego construya la gráfica.

En la función y = tan (x) se indentifican el parámetro "A" y "B", A = 1 y B = 1, a partir de su ecuación general y = A tan (Bx + C) + D.

• Amplitud: A = 1 Se reemplaza el valor de la amplitud.
• Período: T= π/b = π/1= π Se reemplaza el valor de b en la expresión de T.

• Para hallar los cortes con el eje x utilice la siguiente ecuación:
  x = nπ, n entero
Por tanto:
  n= -2, x = (-2)(π) = -6.28 Se reemplaza n en la expresión de corte con el eje X.
  n= -1, x = (-1)(π) = -3.14
  n= 0, x = 0(π) = 9.42
  n= 1 , x = 1(π) = 3.14
  n= 2, x = 2(π) = 6.28

• Para hallar el corte con el eje y:
Dado que D= 0, no corta el eje y

Luego, para realizar el bosquejo de la gráfica de la función y = tan (x), se ubica su periódo que va de - π hasta π.

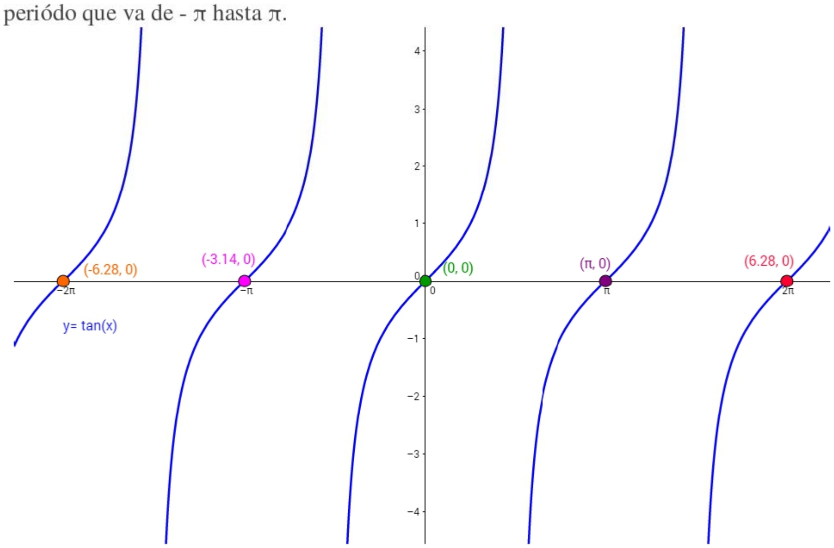


Figura 83. Ejemplo de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

114

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Resuelva el siguiente ejercicio:

2. Dada la siguiente función $y= 2 \tan(2x + \pi/2)$ determine los parámetros y construya su gráfica.

Resolución:

• Comparando con la ecuación general $y = A \tan (Bx + C) + D$, se puede determinar los valores de cada parámetro, por tanto se tiene:

$A = 2 \quad B = 2 \quad C = \pi/2 \quad D= 0$

• Luego, se determina el período:

$P = \pi / B$ Ecuación del periódo.

$P = \pi / 2$ Se reemplaza el valor de B.

• Seguido de esto, determinamos el punto de desplazamiento de fase (Df).

$Df= - C / B$ Ecuación del desplazamiento de fase.

$Df= - \pi /2 /2$ Se reemplaza el valor de C y B.

$Df= - \pi/4$

• Dado que la gráfica de la tangente empieza en $-\pi /2$ y termina en $\pi /2$, desarrollamos el argumento de la función como una desigualdad.

$- \pi /2 < 2x + \pi/2 < \pi/2$ Desigualdad de la función tangente con su argumento.

$- \pi /2 - \pi/2 < 2x + \pi/2 -\pi/2 < \pi/2 -\pi/2$

$- 2\pi /2 < 2x < 0$

$- \pi < 2x < 0$

Lo que indica que en los puntos $- \pi$, $- \pi /2$ y 0 se formarán asíntotas verticales.

• Para conocer los cortes con el eje x, se procede de la siguiente manera:
$x= n\pi$;

$2x + \pi/2 = n\pi$

$2x= n\pi - \pi/2$ Se iguala el argumento de la función a $n\pi$.

$x= \pi(n - 1/2) / 2$

$n= -1, \quad x = -3\pi/4= - 2.36$

$n= 0, \quad x = - \pi/4= - 0.79$

$n = 1 , \quad x= \pi/4= 0.79$

115

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

- Para hallar el desplazamiento horizontal, se utiliza la ecuación del desfase.

  $C / B= (\pi/2) / 2$

  $C / B = \pi / 4$, debido a que C tiene signo positivo la gráfica se traslada horizontalmente $\pi/4$ hacia la izquierda.

- Ahora se busca el corte con el eje "y":

  Como D= 0 no hay corte con el eje y.

- Luego, de hallado todos los datos se procede a realizar el bosquejo de la gráfica:

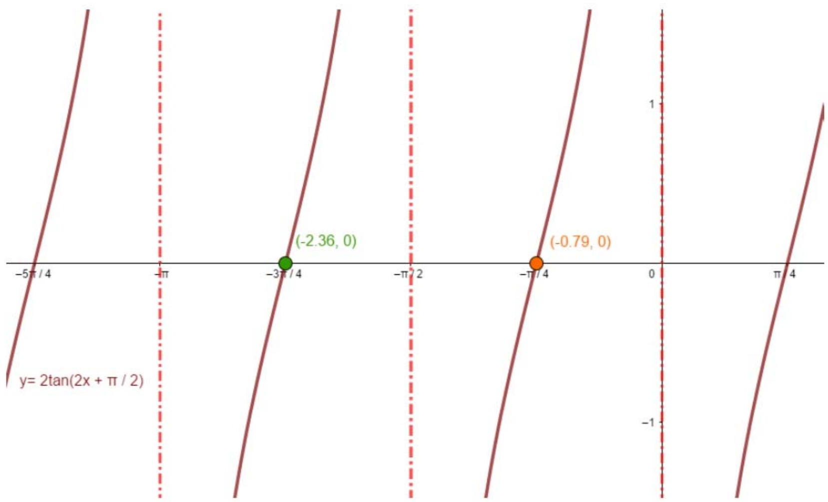


Figura 84. Ejemplo de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

116

Actividad grupal: Cuestionario.

R E F U E R Z A   T U   C O N O C I M I E N T O

1. Conteste las siguientes preguntas:

¿Cuando una línea es tangente al círculo trigonométrico?

Una línea es tangente al círculo trigonométrico cuando lo intersecta en un solo punto.

Si en ángulo α crece de 0° a 90° que ocurre con la tangente.

La gárfica de la función tangente no está defenida para el ángulo de 90°, debido a que tan α= sen α/ cos α y el coseno de 90° es cero y una división para cero no está definido.

¿Por qué se forman asíntotas en la gráfica de la función tangente?

Porque no está deefinido una división entre cero c/0= Ind. y esto ocurre cuando el ángulo tiene un valor de 90°, 270°, 450°, etc.

2. Complete los siguientes características de la función tangente.

Dominio: R - $\{\pi/2 + n\pi\}$ con $n \in Z$.

Período: Cada π unidades.

Rango: Conjunto de los R.

Tipo d función : La función es impar.

3. Graficar la función tangente para el valor de 0° a 180°, haciendo variar al ángulo de 30° en 30°.

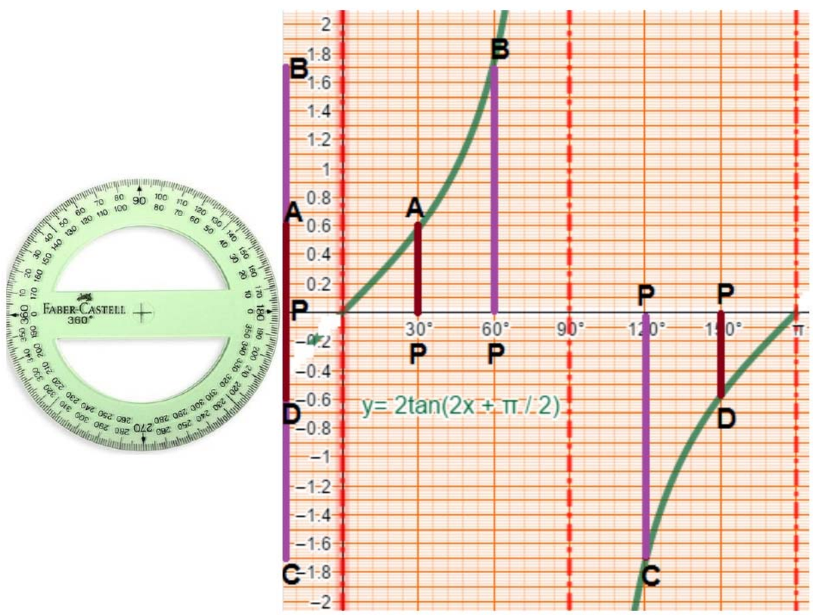


Figura 85. Ejemplo de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

117

4. En la siguiente gráfica de la función tangente análice los parámetros establecidos.

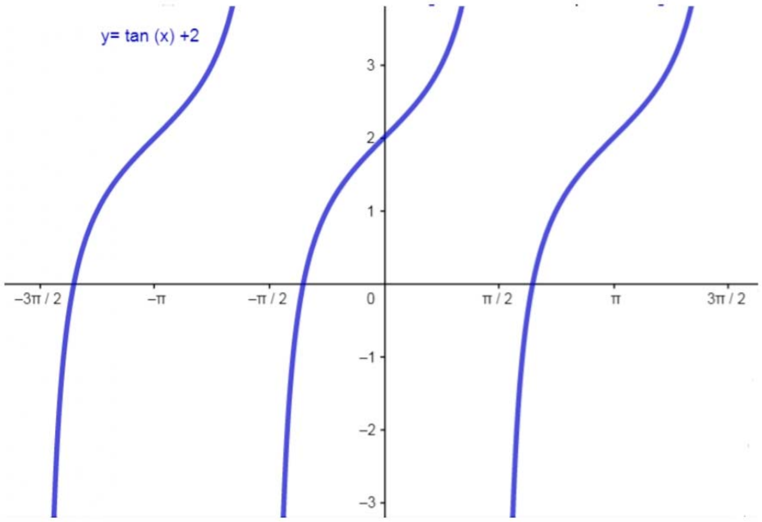


Figura 86. Ejemplo de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Amplitud: 1

Desfase horizontal: No tiene desfase dado que C= 0.

Frecuencia: 1

Período: Cada π.

Tipo de función: Creciente.

Desplazamiento: 2 unidades hacia arriba.

5. Dada la siguiente función y= tan(x + 2), construya su gráfica.

En la función y = tan (x + 2) se identifican los parámetros "A", "B" y "C", A = 1, B = 1 y C = 2, a partir de su ecuación general y = A tan (Bx + C) + D.

• Amplitud: A = 1

• Período: T= π/b = π/1= π

• Como C es igual a +2, la gráfica tiene un desfase de dos unidades hacia la izquierda, es decir se adelanta dos unidades.

118

• Para conocer los cortes con el eje x, se procede de la siguiente manera:
x= nπ con n entero.

$$x + 2 = n\pi$$
$$x = n\pi - 2$$

Por tanto:

n= -1, x = (-1)π -2 = - π - 2 = - 5.14
n= 0, x = (0)π -2 = - 2
n = 1 , x = (1)π -2 = π - 2 = 1.14

• Para hallar el corte con el eje y:
Dado que D= 0, no corta el eje y

Luego, para realizar el bosquejo de la gráfica de la función y = tan (x), se ubica su periódo que va de - π hasta π.

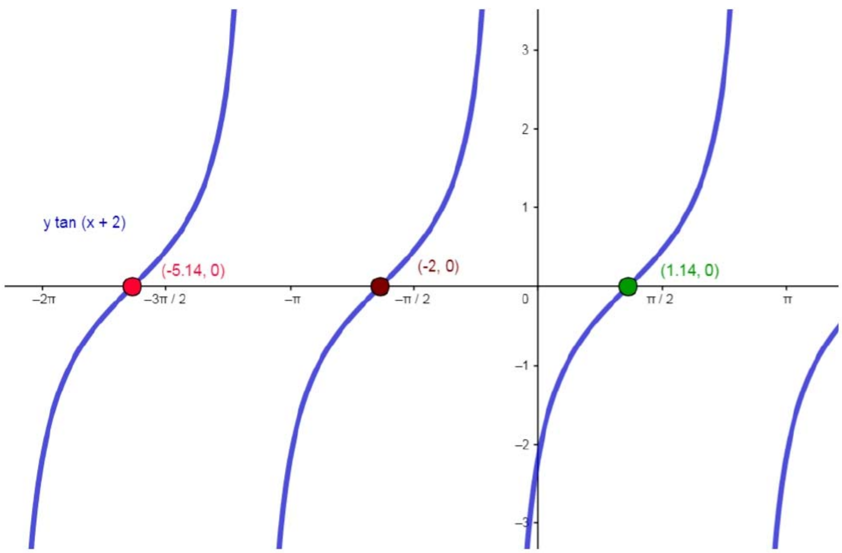


Figura 87. Ejemplo de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSECANTE

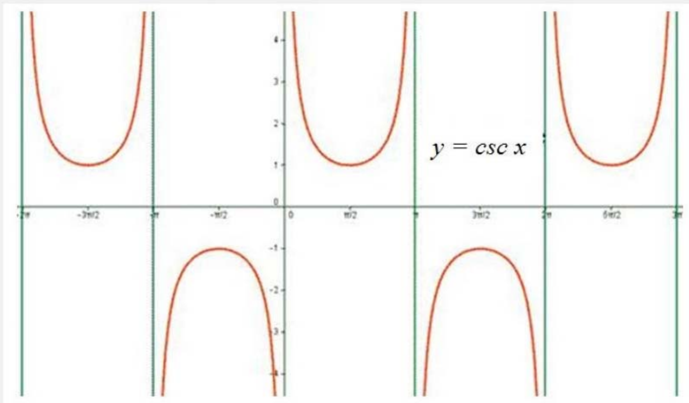


Figura 88. Gráfica de la función cosecante.
Fuente: http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales /funciones_elementales/teoria/secante.html

OBJETIVOS

- **Construir la gráfica de la función cosecante.**
- **Identificar las características de la función cosecante.**

LOGROS DE APRENDIZAJE

- **Define la función cosecante a partir del círculo trigonométrico.**
- **Identifica su respectiva gráfica a partir del análisis de sus características particulares.**

121

CLASE N° 5

Gráfica de la función cosecante

ANTICIPACIÓN: Sesión 5: Duración 2 horas.

Actividad individual: Evaluación diagnóstica.

Evaluación diagnóstica sobre las gráficas de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Se sugiere que esta evaluación sea tomada al iniciar la clase, con el fin de saber si las clases anteriores quedaron claras.

***Escriba la ecuación general de la función seno**

*** ¿Cómo se identifica la amplitud de una función trigonométrica?**

*** ¿Cuál es la fórmula para hallar el periodo de una función trigonométrica?**

P =

***¿Cómo se reconoce el desfase de una función trigonométrica?**

*** ¿Qué sucede con la gráfica de la función tangente en los ángulos de 90°, 270° y 360°?**

123

Fundamentación teórica

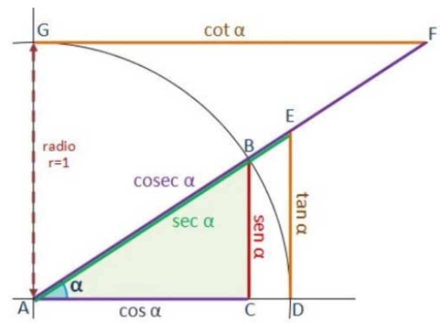


Figura 89. Líneas trigonométricas.
Fuente: https://www.universoformulas.com/matematicas/trigonometria/razones-trigonometricas-reciprocas/

A partir de la clase de líneas en el círculo trigonométrico, se puede observar en la Figura 89, que el segmento AF representa el valor de la función cosecante. Dicha función es la inversa del seno, es decir, la cosecante de un ángulo (α) de un triángulo rectángulo se define como la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto, es decir:

$$\csc \alpha = 1 / (\text{sen}\ \alpha)$$

La ecuación general de la función cosecante es la siguiente:

$$\boxed{y = A \csc (Bx + C) = 1 / A\ \text{sen}\ (Bx + C)}$$

Como ya se explicó en las clases anteriores, dicha ecuación es similar a las de las funciones seno y coseno, por tanto cada uno de los parámetros que intervienen son ya conocidos, es así que el procedimiento para realizar la gráfica de las diferentes formas de la cosecante es similar al de las gráficas de la funciones seno y coseno.

Recuerde: No puede ingresar en la calculadora directamente la función cosecante, por tanto puede digitar su función recíproca, es decir, 1/sen(x)

Fundamentación teórica

Para realizar la gráfica de la función cosecante cabe resaltar los signos en cada cuadrante:

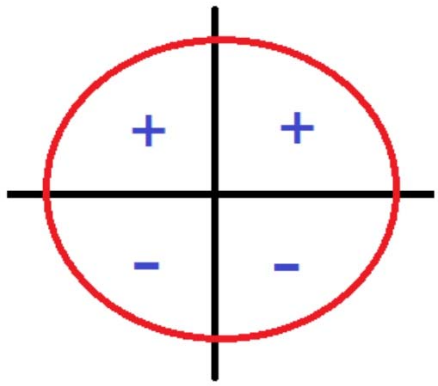


Figura 90. Signos de la función secante.
Fuente: https://matematicasmodernas.com/signos-de-las-funciones-trigonometricas/

Debido a que la función cosecante es positva para el primer y segundo cuadrante, su gráfica de de 0° a 180° estará en el primer cuadrante del plano cartesiano, mientras que en el tercer y cuarto cuadrantes, dicha función es negativa, por lo tanto la gráfica entre 180° hasta 360° estará en el cuarto cuadrante del plano cartesiano.

Recuerde que: Para hallar las asíntotas verticales en el eje x puede usar la siguiente fórmula: $x = n\pi$

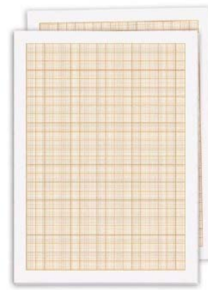
CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad individual: Trabajo dirigido.

Aprendamos haciendo

Materiales:

- Hojas milimetradas
- Lápiz
- Graduador
- Regla



Procedimiento:

1. Dibujar el círculo trigonométrico en la parte izquierda de la hoja y en la parte derecha el plano cartesiano, los dos con divisiones de 30°. Luego, dibujar en el círculo trigonométrico dibujar la línea cotangente. (Figura 91)

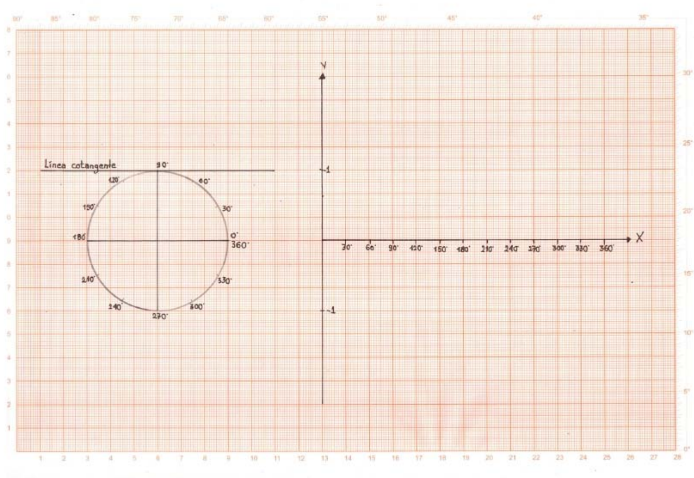


Figura 91. Círculo trignométrico, plano cartesiano.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Recuerde que: Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, estas asíntotas suelen aparecer al haber puntos donde la función no esté definida.

126

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

2. Dibujar un triángulo rectángulo en el ángulo de 30°, considerendo que la línea trigonométrica que representa la función cosecante se intercepta con la línea cotagente, después medir la longitud del segmento OA y trasladarlo al plano cartesiano en el ángulo correspondiente, como se muestra en la siguiente figura.

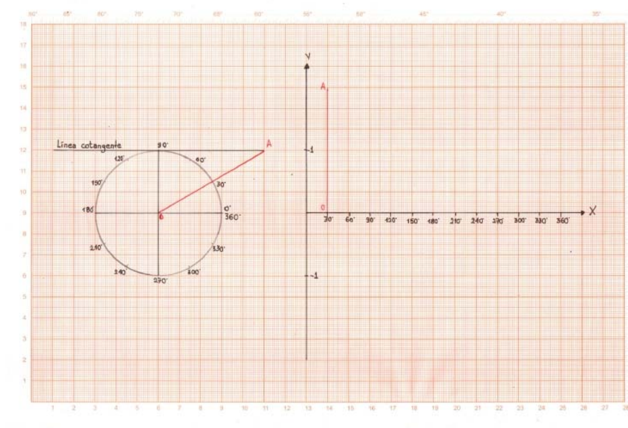


Figura 92. Construcción de la gráfica de la cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

3. Continuar con el mismo procedimiento para los ángulos de 60°, 90°, 120°, 150°.

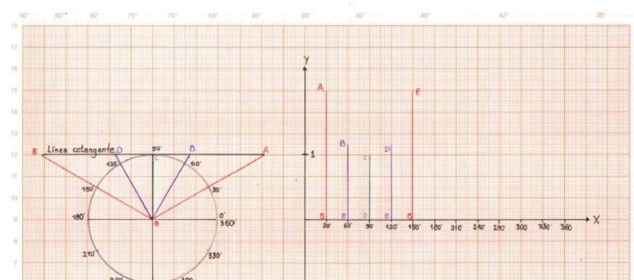


Figura 93. Construcción de la gráfica de la cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

127

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Se recomienda al docente realizar la siguiente pregunta durante la actividad de construcción de la gráfica de la función cosecante

- **¿Qué sucede con la línea de la función cosecante para el ángulo de 180°?**

La línea de la función cosecante para el ángulo de 180° es paralela a la línea cotangente, por lo que no se interceptan, por tal razón se genera una asíntota vertical en dicho ángulo.

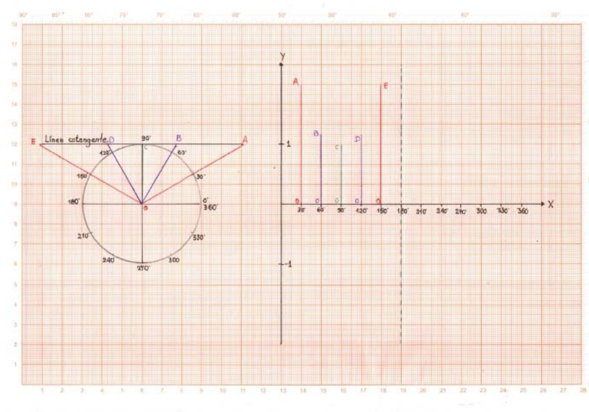


Figura 94. Construcción de la gráfica de la cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

4. Continuar con el mismo procedimiento para los ángulos restantes, considerando los signos de la función cosecante en cada cuadrante.

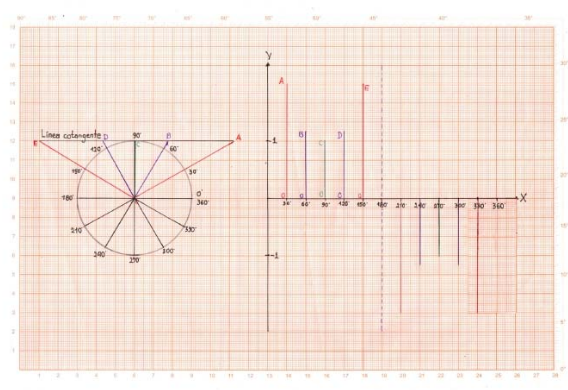


Figura 95. Construcción de la gráfica de la cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

5. Unir los extremos de cada segmento e indicar la gráfica obtenida

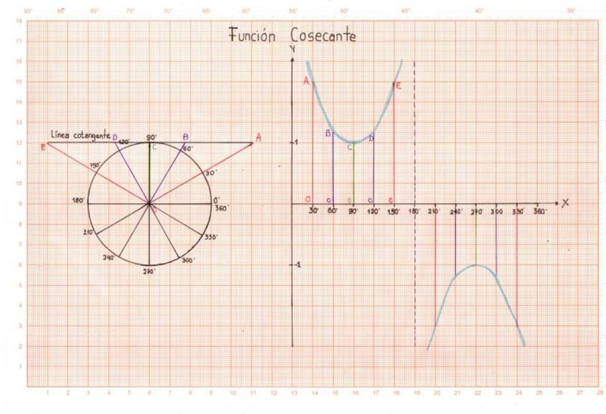


Figura 96. Construcción de la gráfica de la cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Conclusiones:

De acuerdo a la gráfica realizada, se hará el siguiente análisis de las características de la función cosecante:

• ¿Qué sucede con la cosecante si el ángulo es de 0°, 180° o 360°?

De acuerdo lo visto en la clase de la función seno, en dichos ángulos el denominador se hace cero, lo que produce que dicho cociente no este definido, por tanto se generan asíntotas verticales.

• ¿Qué sucede en el punto $(\pi/2; 1)$ y en punto $(\pi/2 ; -1)$?

Si se compara con la gráfica del seno, el punto máximo que alcanza será el punto mínimo de la gráfica de la cosecante.

• ¿Cuál es el dominio de la función cosecante?

El dominio son los números reales, excepto los múltiplos de π, es decir, $\{ x \in R / x \neq n\pi, n \in Z \}$, debido a que en estos puntos se forman asíntotas.

• ¿ Cuál es el rango de la función cosecante?

El rango es el conjunto $\{ y \in R / y \geq 1 \} \cup \{ y \in R / y \leq -1 \}$

• ¿Cuál es el período de la función cosecante?

Su período es 2π.

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Ejercicio modelo

Realizar la gráfica de la siguiente función y = - 2/3 csc(x/2+π /4)

- Recuerde las fórmulas a usar son las siguientes:

  A = lal P = 2π/(B) Desfase = C / B

Ecuación general: y = A csc (Bx + C) + D, por tanto

A = 2/3 B = 1/2 C = π /4

- La amplitud es igual a - 2/3

- El período es igual a

  P=2π/(1/2) Se reemplaza el valor de B, en la ecuación del período

  P = 4π

- Para hallar las asíntotas se utiliza la siguiente ecuación

  x = nπ

  x/2 + π /4 = nπ

  x = 2(nπ - π /4) Se iguala el argumento de la función a la ecuación de las asíntotas

  n = 0; x = -π /2

  n = 1; x = 3π /2

  n = 2; x = 7π /2

- Para hallar el desfase se procede de la siguiente manera:

  C / B = (π /4)/(1/2)

  C / B = π /2

- Luego,hallar el corte con el eje y:

  y = - 2/3 csc(x/2 + π/4)

  y (0) = - 2/3 csc(0/2 + π/4)

  y (0) = - 2/3 csc(π/4) Se da el valor de cero a x

  y (0) = - 2/3 .1/sen(π/4)

  y (0) = - 2/3 .2/(√2) Se reemplaza la función cosecante por su ecuación equivalente

  y(0) = - 2/3 . √2

  y (0) = - 0.94

130

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Una vez obtenidos todos estos datos, se procede a realizar el bosquejo de la gráfica de la función

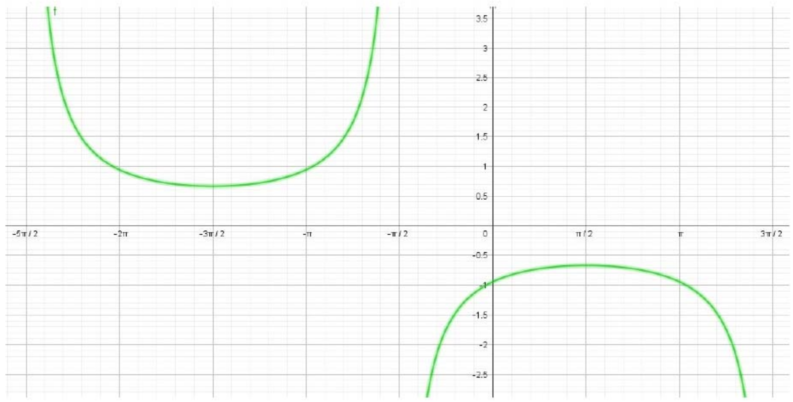


Figura 97. Ejemplo de la función cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

En conclusión:

- Dominio: $\{ x \in R / x \neq n\pi, n \in Z \}$
- Rango:] ∞; -2/3] U [2/3; + ∞ [
- Período: 4π

131

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad individual: Hoja de trabajo.

REFUERZA TU CONOCIMIENTO

1. Conteste las siguientes preguntas.

- ¿La función cosecante es periódica?

Si, debidoa a que su período es 2π

- ¿La función es par o impar?

Es una función impar, es decir csc (- x) = - csc x

- ¿La función presenta cortes con el eje *x* ?

La función cosecante no corta al eje *x*

2. Seleccione la función que corresponde a la siguente gráfica.

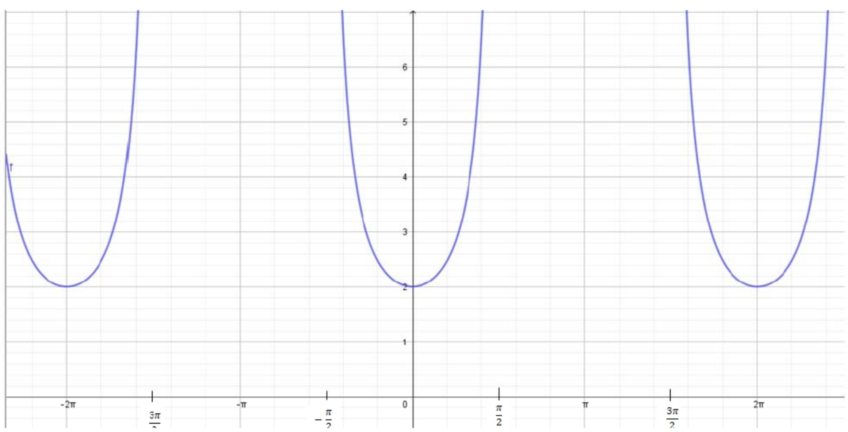


Figura 98. Gráfica de la función cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

y = 2 csc (x + π / 2)	X
y = 2 csc (x - π / 2)	
y = 1/2 csc (x + π / 2)	

132

3. Realizar la gráfica de las siguientes funciones.

- $y = \csc(2x-\pi)$

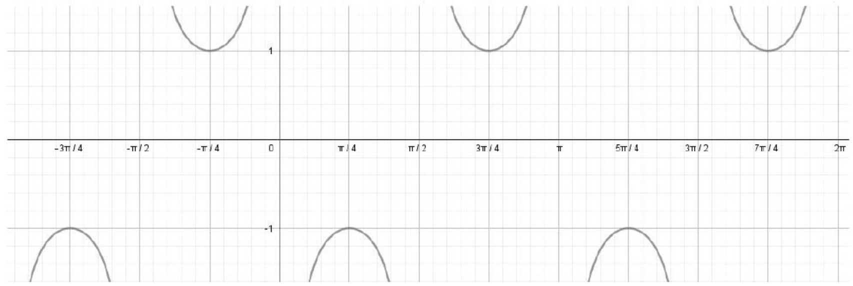


Figura 99. Ejemplo de la función cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- $y = 3 \csc(x/2)$

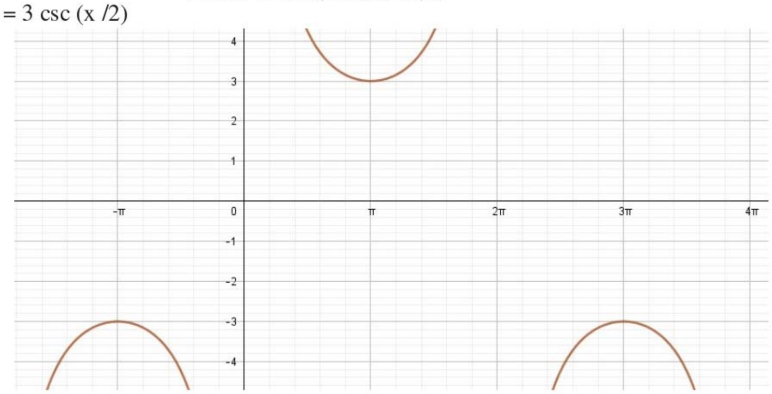


Figura 100. Ejemplo de la función cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- $y = 2 \csc(x+\pi/4)$

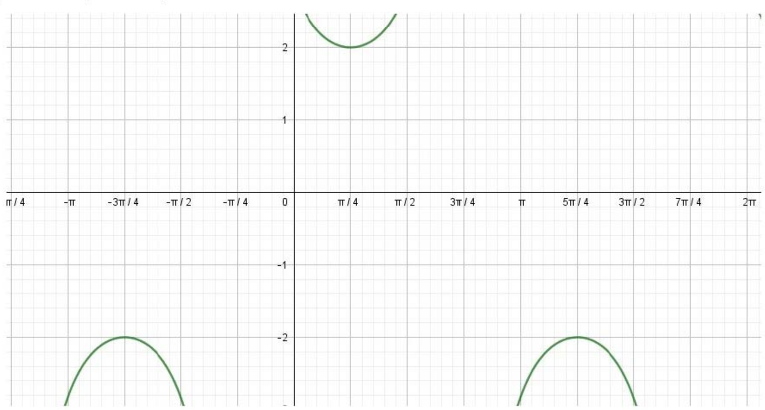


Figura 101. Ejemplo de la función cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

133

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SECANTE

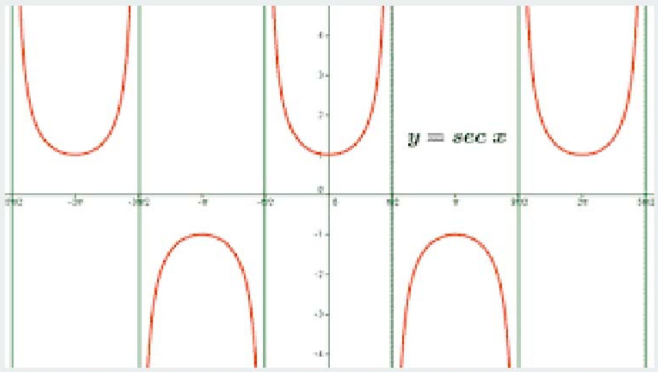


Figura 102. Gráfica de la función secante.
Fuente: http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/secante.html

OBJETIVOS

- **Construir y analizar la gráfica de la función secante.**
- **Identificar las características de la función secante.**

LOGROS DE APRENDIZAJE

- **Define la función secante a partir del círculo trigonométrico.**
- **Identifica su respectiva gráfica a partir del análisis de sus características particulares.**

135

CLASE Nº 6

Gráfica de la función secante

ANTICIPACIÓN: Sesión 6: Duración 2 horas.

Actividad individual: Organizador gráfico.

El docente entregará al estudiante el siguiente organizador gráfico, y le pedirá que complete las características de las funciones estudiadas en clases anteriores.

ORGANIZADOR GRÁFICO:

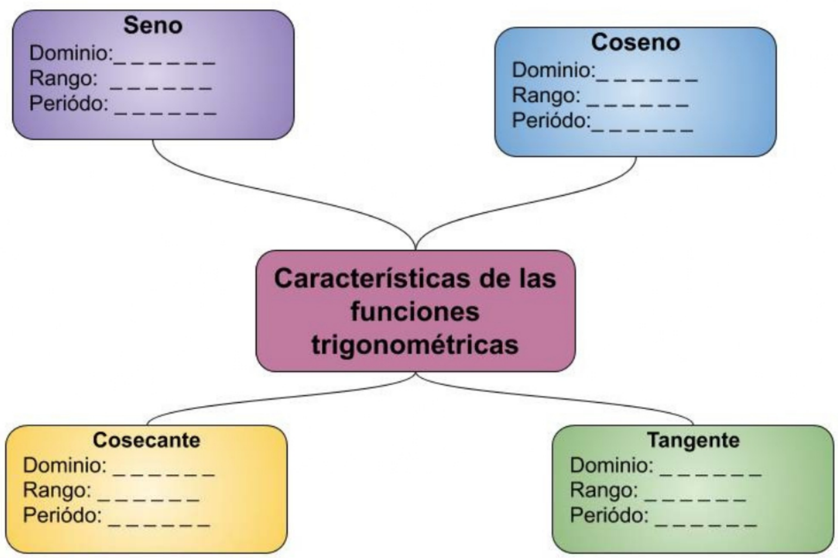


Figura 103. Organizador gráfico de las funciones trigonométricas.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

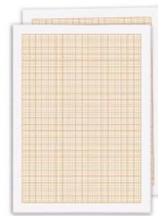
137

Actividad grupal: Preguntas exploratorias.

Aprendamos haciendo

Materiales

Hojas milimetradas
Lápiz
Graduador
Regla



Procedimiento:

1. Dibujar el círculo trigonométrico en la parte izquierda de la hoja y en la parte derecha el plano cartesiano, los dos con divisiones de 30°.

2. Dibujar la línea trigonométrica que representa la función tangente, como se muestra en la siguiente figura.

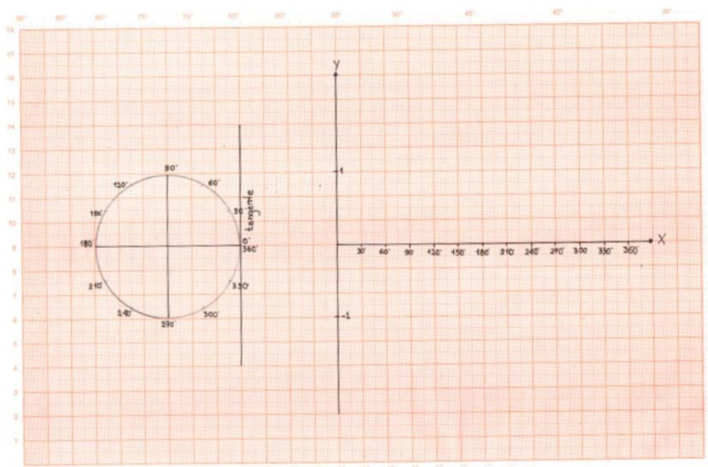


Figura 104. Construcción de la gráfica de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

3. Dibujar el segmento OA, que va desde el origen hasta la línea tangente, el cual representa el valor de la función secante, luego trasladarlo al plano cartesiano en el ángulo correspondiente como se muestra en la siguiente figura:

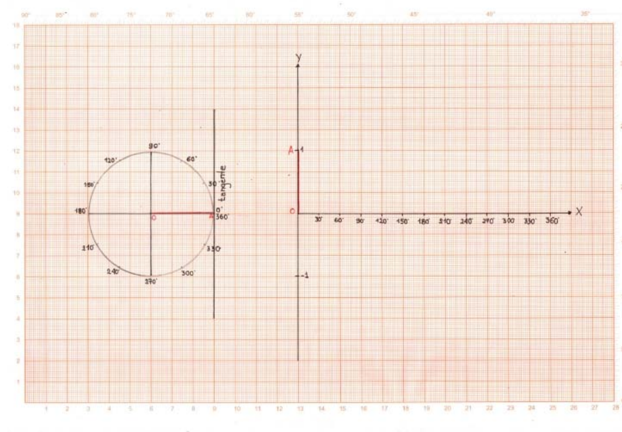


Figura 105. Construcción de la gráfica de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

4. Dibujar un triángulo rectángulo en 30°, en cual la hipotenusa va desde el origen hasta la línea tangente,la misma que esta representada por el segmento OB, que es la línea secante, la cual debe ser trasladada al plano cartesiano en el ángulo correspondiente como se muestra en la siguiente figura:

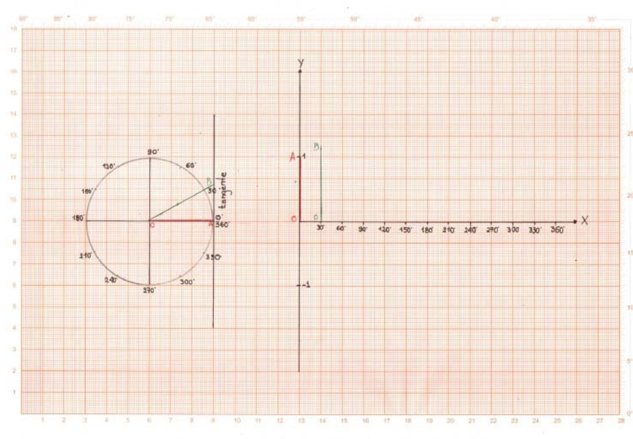


Figura 106. Construcción de la gráfica de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

139

5. Continuar con el mismo procedimiento para el ángulo de 60°.

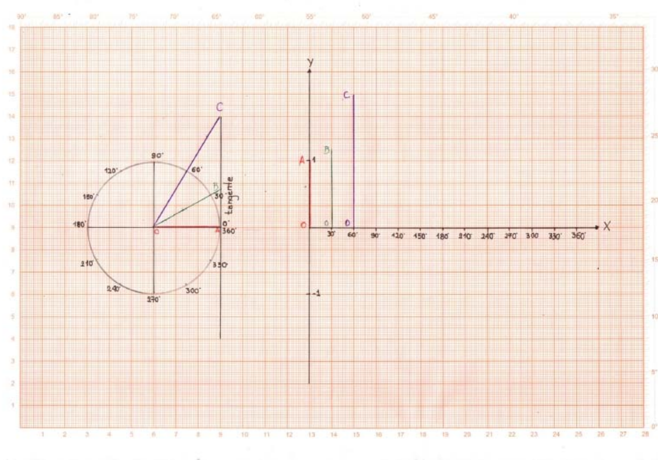


Figura 107. Construcción de la gráfica de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Se recomienda al docente realizar la siguiente pregunta durante la actividad de construcción de la gráfica de la función secante

- ¿Qué sucede con la línea de la función secante para el ángulo de 90°?

La línea de la función secante para el ángulo de 90° es paralela a la línea tangente, por lo que no se interceptan, por tal razón se genera una asíntota vertical en dicho ángulo.

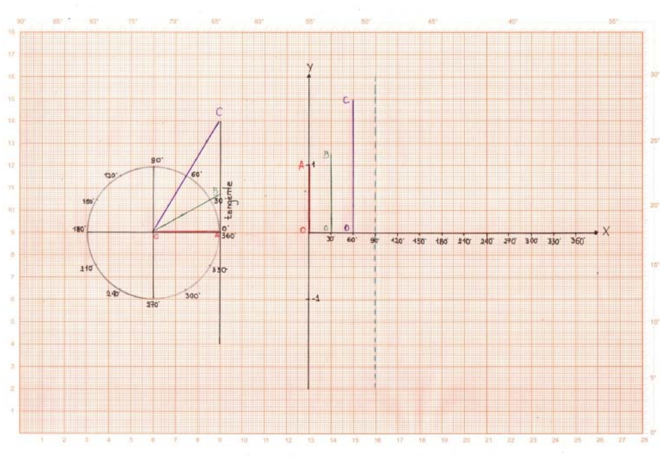


Figura 108. Construcción de la gráfica de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

6. Continuar con el mismo procedimiento para los ángulos restantes, considerando los signos de la función secante en cada cuadrante.

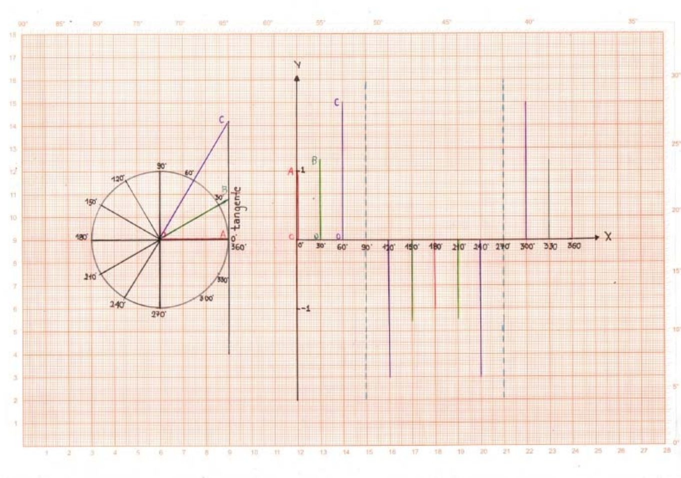


Figura 109. Construcción de la gráfica de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

7. Unir los extremos de cada segmento e indicar la gráfica obtenida.

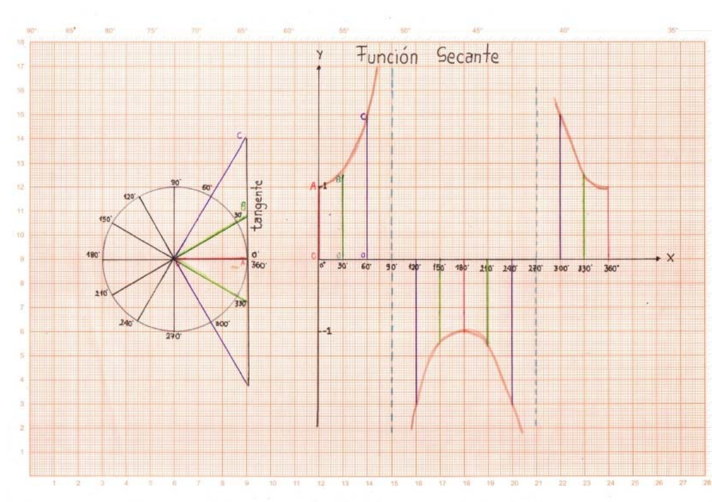


Figura 110. Construcción de la gráfica de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Preguntas de refuerzo:

De acuerdo a la gráfica realizada, se sugiere hacer las siguientes preguntas a diferentes estudiantes.

- ¿La función es periódica?

Si, puesto que su periódo es 2π.

- ¿La función es par o impar?

Es una función par, es decir, sec (-x) = sec x.

- ¿La función presenta cortes con el eje x?

La función secante no corta el eje x.

- ¿ Qué sucede con la secante si el ángulo es de 90°, 270°?

De acuerdo lo visto en la clase de la función coseno, en dichos ángulos el denominador se hace cero, lo que produce una indeterminación, por tanto se generan asíntotas verticales.

- ¿Qué sucede en el punto (0; 1) y en punto (π ; -1)?

Si se compara con la gráfica del coseno, el punto máximo que alcanza será el punto mínimo de la gráfica de la secante.

- ¿Cuál es el dominio de la función secante?

El dominio son los números reales, excepto los múltiplos de π, es decir, $\{ x \in R \ / \ x \neq n\pi/2, \ n \text{ entero impar} \}$.

- ¿ Cuál es el rango de la función secante?

El rango es el conjunto $\{ y \in R \ / \ y \geq 1 \} \cup \{ y \in R \ / \ y \leq -1 \}$.

¿Sabías que...?

Las funciones trigonométricas modelan algunos movimientos periódicos como cuerdas vibrantes,movimientos en vibración, movimientos de péndulos, movimientos de resortes o movimientos circulares periódicos, entre otros.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

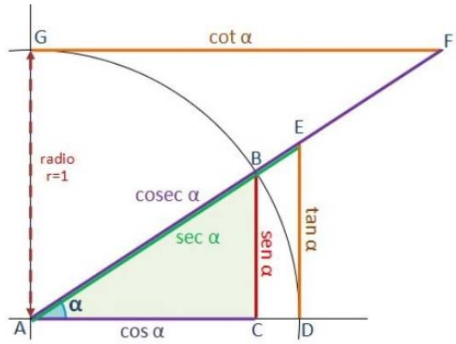


Figura 111. Líneas trigonométricas.
Fuente: https://www.universoformulas.com/matematicas/trigonometria/razones-trigonometricas-reciprocas/

A partir de la clase de líneas en el círculo trigonométrico, se puede observar en la Figura 103, que el segmento AE representa el valor de la función secante. Dicha función es la inversa de la función coseno, es decir, la secante de un ángulo (α) de un triángulo rectángulo se define como la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente, es decir:

$$\sec \alpha = 1/(\cos \alpha)$$

La ecuación general de la función secante es la siguiente:

$$\boxed{y = A \sec (Bx + C) = 1 / A \cos(Bx + C)}$$

Para realizar la gráfica de la función secante, se debe considerar los signos en cada cuadrante.

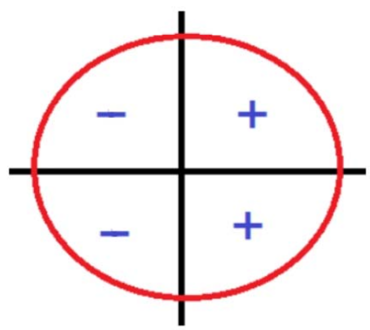


Figura 112. Signos de la función secante.
Fuente: https://matematicasmodernas.com/signos-de-las-funciones-trigonometricas/

143

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Ejercicio modelo

Realice la gráfica de la siguiente función y = 2 sec (x - π/2)

Recuerde las fórmulas a usar son las siguientes:

Ecuación general: y = A sec (Bx + C) + D ; **Amplitud** = lAl; **Período** = 2π / (lBl)

Por tanto A = 2, B = 1, C = - π/2

• La amplitud es igual a 2

• El período sería igual a:
P = 2 π/ 1
P = 2π

Se reemplaza el valor de B, en la ecuación del período.

• El desfase es igual a:
C/B = - π/2/1
C/B = - π/2
Ya que el desfase el π/2 la gráfica se desplaza dicho valor hacia la derecha ya que su valor es negativo.

• Para hallar las asíntotas, se utiliza la siguiente fómula:
x = (2n + 1). π/2   x - π/2 = (2n + 1). π/2
x = (2n + 1). π/2 + π/2

n = -1; x = 0
n = 0; x = π
n = 1; x = 2π
n = 2; x = 3π

• Corte con el eje y:
y = - 2 sec(x - π/2))
y(0) = -2 sec (0 - π/2)
y(0) = -2 sec(π/2)
y = -2 .1 / cos (π)

Se reemplaza el valor de cero en x.

• Debido a que el coseno de π es cero, el denominador se convierte en una indeterminación, por tanto la gráfica no corta al eje y.

144

Una vez obtenidos todos los datos, se procede a realizar el bosquejo de la gráfica de la función

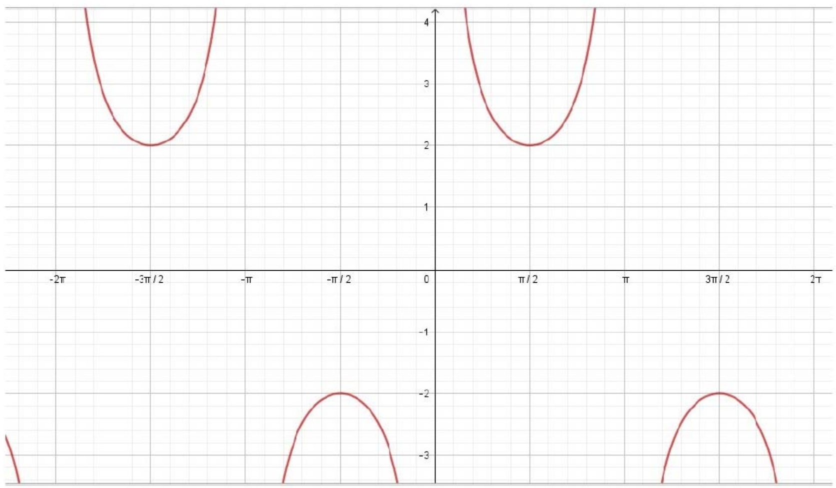


Figura 113. Gráfica de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Problema de aplicación

Una cámara de televisión está en una plataforma de observación a 27 metros de la calle en la que pasará un desfile de izquierda a derecha(observe la figura). Escriba la distancia d de la cámara a una unidad particular en el desfile como una función del ángulo x y grafique la función sobre el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

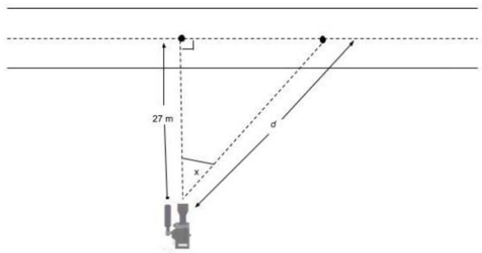


Figura 114. Ejercicio de cobertura de televisión.
Fuente: Larson y Falvo (2011).*Trigonometría*.Mexico: Cengage Learning.

1. El lado opuesto a *x* se denominará *e*.
2. Se halla la tangente de x:
   tan x = e /27
   e = 27. tan x
3. Se determina el seno de x:
   sen x = e / d
   e = d. sen x
4. Se reemplaza *d* en la primera ecuación
   tan x = d. sen x /27

5. Se despeja *d*:
   d = 27. tan x / sen x

6. Se sustituye la tangente por su equivalente:
   d = 27. (sen x / cos x) / sen x

7. Finalmente *d* es igual a:
   d = 27 / cos x

   d = 27 sec x

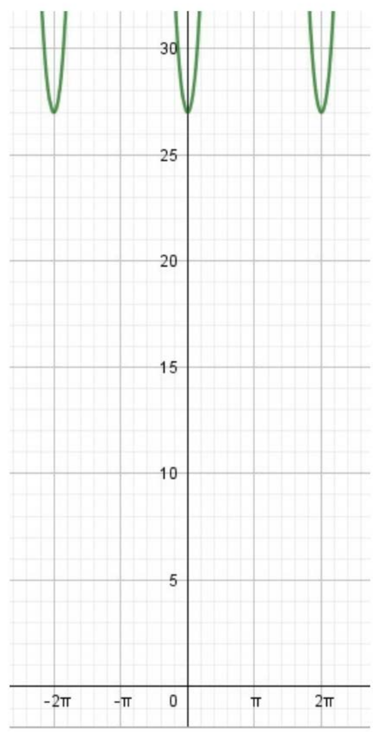


Figura 115. Gráfica de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

146

Actividad individual: Hoja de trabajo

REFUERZA TU CONOCIMIENTO

1. Complete los espacios:

- La gráfica de la función secante tiene asíntotas *verticales*
- El período de y = sec x es 2π
- El dominio de la función secante son los múltiplos de π, es decir *{ $x \in R$ / $x \neq n\pi/2$, n entero impar }*
- La gráfica de la función secante es una función *par* , por lo que tiene simetría respecto al eje *y*

2. La siguiente figura muestra dos traslaciones de la función y = sec x. Escriba la ecuación de la función que corresponde a cada una de las gráficas.

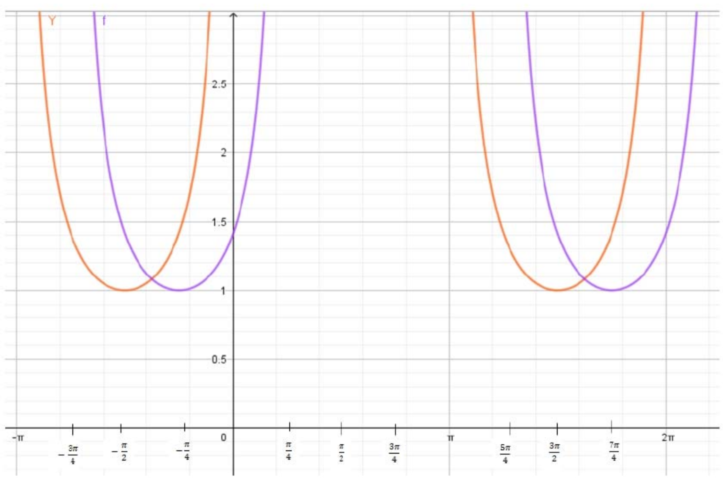


Figura 116. Traslación de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

y = $\sec(x + \pi/4)$

y = $\sec(x + \pi/2)$

3. Realice las gráficas de las siguientes funciones obteniendo cada uno de los parámetros estudiados.

- y = 1/4 sec (x)
- y = 1/2 sec(πx)
- y = 2 sec (x+π)

4. Realice las gráficas de las siguientes funciones obteniendo cada uno de los parámetros estudiados.

- y = 1/4 sec (x)

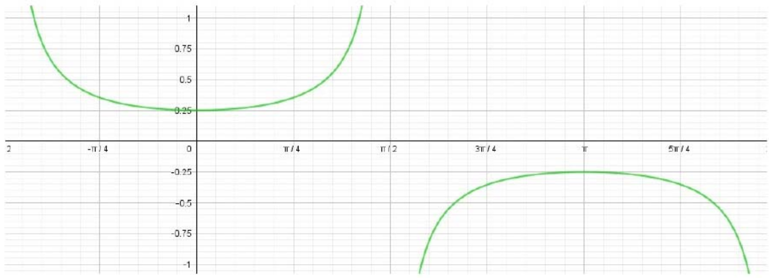


Figura 117. Ejemplo de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- y = 1/2 sec(x + π/2)

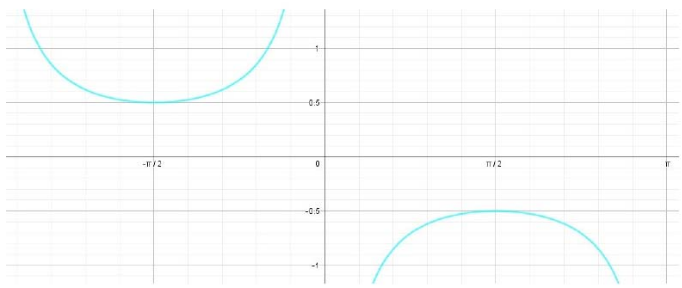


Figura 118. Ejemplo de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- y = 2 sec (x+π)

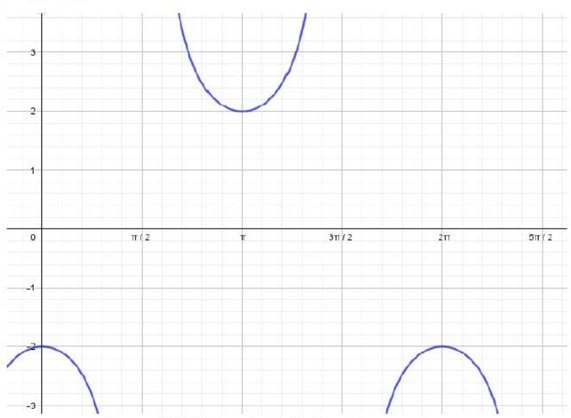


Figura 119. Ejemplo de la función secante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

ACTIVIDAD PREVIA PARA LA CLASE Nº 7

- Observar el siguiente video sobre la curva cotangente, como actividad previa para la siguiente clase.
- Link: https://www.youtube.com/watch?v=nEdrkh_O_oY

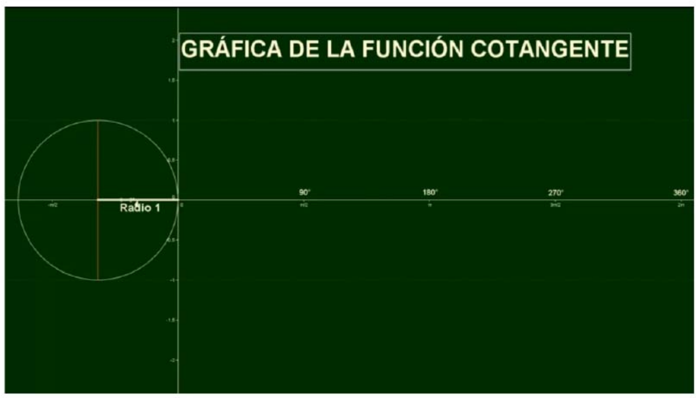


Figura 120. Gráfica de la función cotangente.
Fuente: https://www.youtube.com/watch?v=nEdrkh_O_oY

149

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COTANGENTE

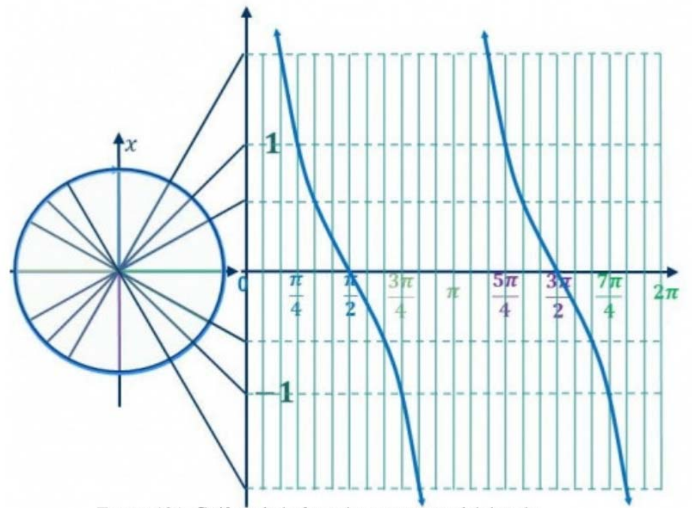


Figura 121. Gráfica de la función cotangente del ángulo.
Fuente: Gráficas funciones trigonométricas L2DJ Temas de Matemáticas INC,2011

OBJETIVOS

- Reconocer el proceso para la construcción de la gráfica cotangente por medio del circulo trigonométrico.
- Analizar las características de la gráfica de la función cotangente.

LOGROS DE APRENDIZAJE

- Reconoce el proceso de construcción de la gráfica cotangente por medio del circulo trigonométrico.
- Identifica la gráfica de la función cotangente a partir de sus características.

CLASE N° 7
Gráfica de la función cotangente

- El término cotangente fue usado por primera vez por Edmund Gunter en 1620.
- Los griegos, con altos conocimientos de trigonometría, de una manera empírica usaron dicho conocimiento para la medición de terrenos.

ANTICIPACIÓN: **Sesión 7: Duración 2 horas.**

Actividad individual: Vídeo educativo.

Se sugiere que el docente realice las siguientes preguntas a los estudiantes con el fin de socializar el vídeo observado en casa, como actividad previa.

- ¿Por qué la tangente no esta definida para los valores de 90° y 270°?

Por que forma una línea paralela a la línea tangente y por que el coseno de 90° es cero y una división para cero no está definida.

- ¿Qué son las asíntotas?

Las asíntotas son rectas que, a medida que se prolongan de manera indefinida, tiende a acercarse a una cierta curva o función.

- ¿Por qué se dice que la cotangente es la inversa de la tangente?

Porque la cotangente es igual a 1/ tan (x), es decir cotg (x)= cos (x) / sen (x).

- ¿Cuándo una función es periódica?

Cuando la función se repite en un mismo intervalo.

- ¿Cuáles son las características de la función cotangente?

Es periódica, es reciproca a la tangente, no tiene máximos y mínimos, es impar, es decreciente, etc.

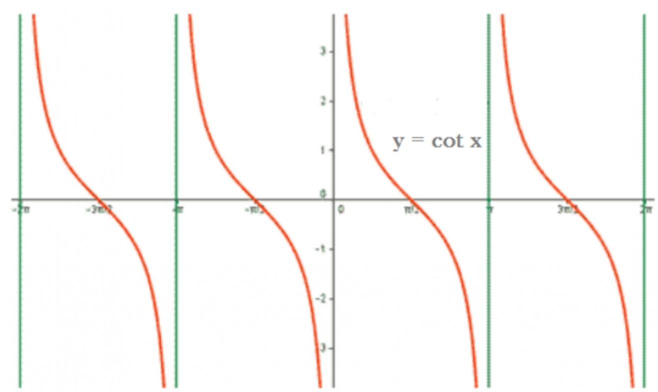


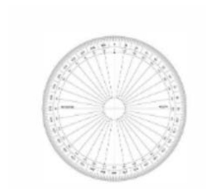
Figura 122. Función cotangente.
Fuente: http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/cotangente.html

153

Actividad individual: Trabajo dirigido.

Aprendamos haciendo

Materiales:



* Hoja milimetrada
* Graduador
* Compás
* Regla
* Marcadores o lápices de colores
* Lápiz
* Borrador

Procedimiento:

1. El estudiante realizará un círculo de 1,5 cm de radio tomando como centro el par ordenado O (7 , 16) de la hoja milimetrada. Posterior a esto, el educando debe realizar una línea tangente al eje de complemento o eje y, la línea cotangente tendrá una longitud de 12 cm, la cuál estará pintada de dos colores como se muestra en la figura 122.

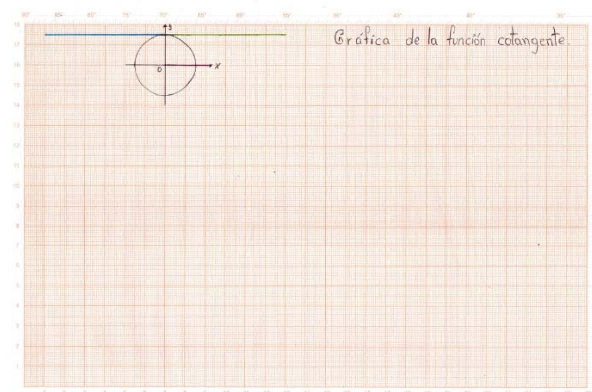


Figura 123. Construcción de la gráfica de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

2. Ahora el estudiante dividirá todo el círculo de 15° en 15° hasta llegar a los 360°. Después dibujará una línea desde el centro del círculo hasta los ángulos de 0° y 15°, luego prolongue la línea hasta que intersecte a la línea cotangente. Seguido de esto graficar un plano cartesiano con origen en el punto P (1 , 7) de la hoja milimetrada, realice 24 divisiones hacia el eje X positivo y numerarlo cada unidad de 15° en 15° hasta el 360°, también realizar siete divisiones para el eje Y positivo y negativo del plano. Después, traslade el segmente RE al plano cartesiano. (Observar figura 123)

154

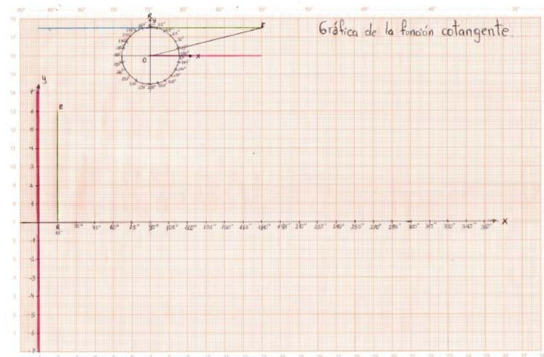


Figura 124. Construcción de la gráfica de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Cuál es la longitud de la línea cotangente para el ángulo de 0°?

La longitud de la línea cotangente no está definida, debido a que en 0° las longitudes de la línea cotangente y la línea del ángulo son paralelas. (Las líneas paralelas nunca se intersectan)

- En el triángulo rectángulo formado en 15°, ¿qué lado representa a la cosecante y a la secante?

El lado formado sobre la línea cotangente representa a la cosecante, mientras que la longitud desde el centro del círculo al origen de complementos representa a la línea secante.

- En el ángulo de 15°, ¿qué lado representa la línea cotangente?

La línea cotangente está representada por la intersección entre la distancia desde el origen de complementos hasta la prolongación de la línea del ángulo de 15°.

- ¿Qué sucede con la longitud de la línea cotangente en el ángulo de 15°?

La línea alcanza una longitud de 6 cm.

- **3. Continuar con la construcción de triángulos rectángulos para los ángulos de 30°, 45°, 60° , 75° y 90°.**

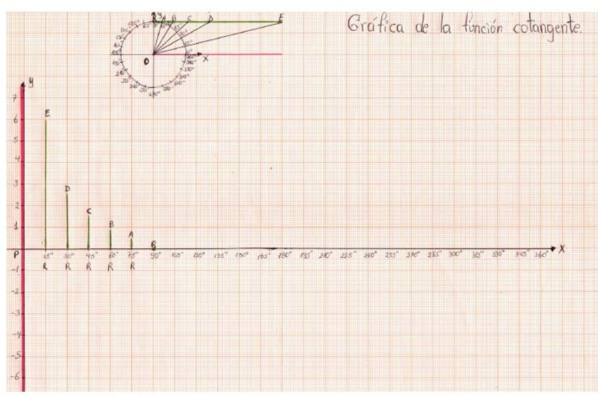


Figura 125. Construcción de la gráfica de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucede con la línea cotangente del ángulo de 30°, respecto al de 60°?

La línea cotangente en 30° disminuye su longitud respecto a la de 60°.

- ¿Qué sucede con la línea cotangente del ángulo de 30°, respecto al de 45°, 60° y 75°?

La línea cotangente presenta un comportamiento decreciente.

- ¿Cuál es la longitud de la línea cotangente para el ángulo de 90°?

La longitud de la línea cotangente es cero.

4. Continuar con el mismo procedimiento para el ángulo de 105° hasta 180°.

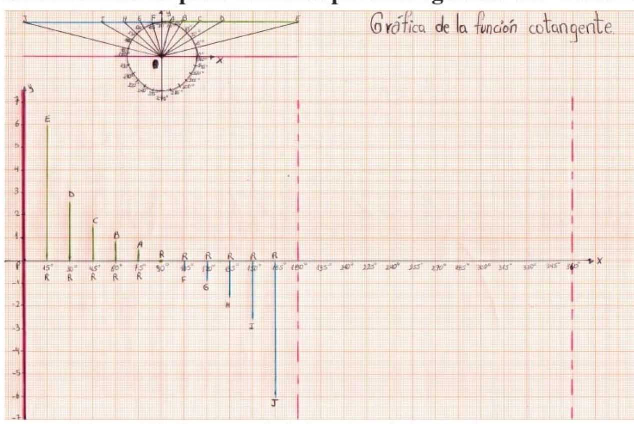


Figura 126. Construcción de la gráfica de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucede con la línea cotangente en el valor de 105°?

La línea cotangente empieza en la parte inferior del eje de las abscisas, debido a qué el signo de la cotangente en el segundo cuadrante es negativo.
La longitud de la línea cotangente es la prolongación del ángulo a la línea cotangente.

- ¿Qué sucede con la línea cotangente del ángulo de 120°, respecto al de 135°, 150° y 165°?

La línea cotangente presenta un comportamiento decreciente.

- ¿Cuál es la longitud de la línea cotangente para el ángulo de 180°?

La longitud de la línea cotangente no está definida, debido a que en 180° las longitudes de la línea cotangente y la línea del ángulo son paralelas. (Las líneas paralelas nunca se intersectan)

5. Continuar con el mismo procedimiento para el ángulo de 195° hasta 360°. Luego una los puntos dibujados y analice la gráfica de la función cotangente.

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

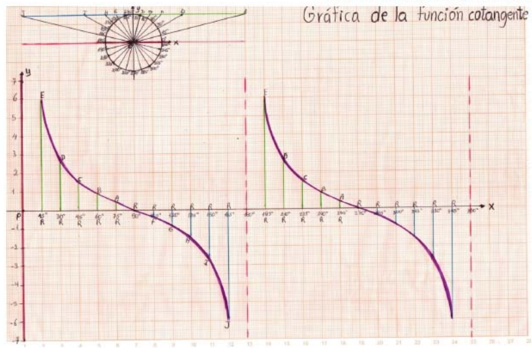


Figura 127. Construcción de la gráfica de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿Qué sucede con la línea cotangente en el valor de 195°?

La línea cotangente empieza en la parte superior del eje de las abscisas, debido a qué el signo de la cotangente en el tercer cuadrante es positivo.

- ¿Qué sucede con la línea cotangente del ángulo de 210°, respecto al de 225°, 240° y 255°?

La línea cotangente presenta comportamiento decreciente.

- ¿Cuál es la longitud de la línea cotangente para el ángulo de 270°?

La línea cotangente es igual a cero.

- ¿Qué comportamiento presenta la línea cotangente entre los ángulos de 285° hasta 345° ?

La línea cotangente presenta un comportamiento decreciente.

- ¿Cuál es el signo de la cotangente en el cuarto cuadrante?

El signo de la cotangente es negativo, debido a que la prolongación de los ángulos del tercer cuadrante hasta la línea cotangente es negativo ya que está en la parte inferior del eje x.

Conclusiones:

Luego de haber culminado la actividad el docente debe realizar las siguientes preguntas generadoras.

1. ¿Qué sucede con la curva de 0° a 165° y de 195° a 360°?

La gráfica de la función cotangente tiende a decrecer.

2. ¿Cuál es el punto máximo y mínimo de la curva?

No tiene punto másimo ni mínimo debido que se forman asíntotas en los ángulos de 180° y 360°.

3. ¿Cuáles son los puntos en qué la curva vale cero?

La función tiene un valor de cero en los ángulos de 90° y 180°.

4. ¿Cuales son las principales características que tiene la gráfica de la función tangente?

El rango de esta función se compone de todos los números reales, es una función periódica, es una función decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.

5. ¿Por qué la gráfica de la función tangente no esta definida para los valores de 180º, 360º, 540°, etc?

Porque la línea cotangente en estos valores es paralela al eje x. (Las líneas paralelas nunca se intersectan)

157

Fundamentación teórica

Función Cotangente

La función cotangente es una función periódica, de período π. Su dominio son todos los números excepto algunos puntos y su rango son todos los números.

Para construirla, debe tenerse en cuenta que:

$$cot = \frac{\cos x}{sen\ x}$$

Para representar esta función, debe recurrirse a la interpretación geométrica de la cotangente. En este gráfico puede observarse el primer cuadrante de una circunferencia de radio 1. El seno del ángulo representado es QP_x, el coseno es OQ y la cotangente es MP.

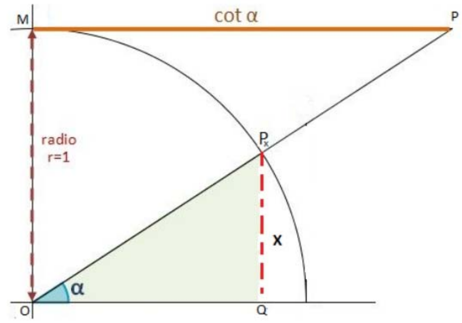


Figura 128. Línea cotangente.
Fuente: https://www.universoformulas.com/

Por lo tanto, se puede representar la función tangente de la siguiente forma:

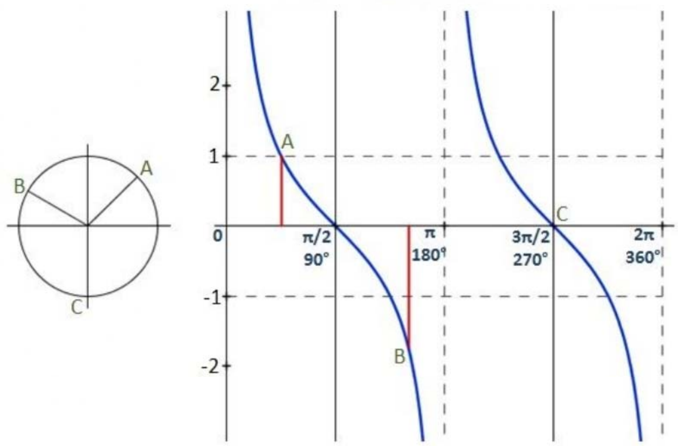


Figura 129. Cotangente.
Fuente:, https://www.universoformulas.com/

Algunas de las características fundamentales de la función cotangente son:

Su dominio es R - {$\pi + n\pi$ con $n \in Z$} .

Es discontinua en los puntos $\pi + n\pi$ con $n \in Z$.

Su recorrido es R .

Corta al eje X en los puntos $\pi/2 + n\pi$ con $n \in Z$.

No corta el eje Y .

Es periódica de periodo π .

$\cot(x) = \cot(x + \pi)$

La función $f(x) = \cot(n \cdot x)$ es periódica de periodo $p = \pi/n$

Para $|n|>1$ el periodo disminuye y para $0<|n|<1$ el periodo aumenta.

158

Fundamentación teórica

- Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.
  cot (- x) = - cot (x)
- Es estrictamente decreciente en todo su dominio.
- No tiene máximos ni mínimos.
- Las rectas y = n·π con n∈Z son asíntotas verticales.
- No está acotada.

La función cotangente, como las funciones seno, coseno y tangente, es una función periódica, en este caso el período π; por tanto, si representamos su gráfica en un intervalo mayor, su gráfica seria la siguiente:

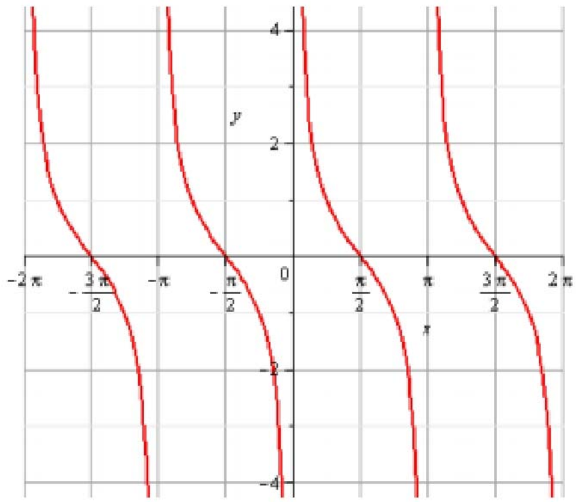


Figura 130. Funciones trigonométricas gráficas.
Fuente: https://matematicasmodernas.com/funciones-trigonometricas-graficas/

Las propiedades de esta función son:
• El dominio de esta función no incluye todos los números, como en el caso de la tangente: para los valores en los que el seno es 0, la función no existe (porque se debería dividir entre 0, lo que es imposible); esto sucede cuando x es igual a nπ (siendo n un número entero cualquiera), es decir, para ...–2π, –π, 0, –π, 2π... (múltiplos)
• El recorrido de esta función se compone de todos los números reales, positivos o negativos.
• La cotangente es siempre una función decreciente.
• Los puntos de corte con los ejes son (π/2 + nπ, 0), donde n es un número entero.

Para recordar:
- Los puntos de corte con los ejes son (π/2 + nπ, 0), donde n es un número entero.
- La función cotangente es una función decreciente y periódica cada π.

159

Fundamentación teórica

Gráfica de la función cotangente

- La ecuación general de la función cotangente es la siguiente:

$$y = A \cot(Bx + C) = A \cos(Bx + C) / A \operatorname{sen}(Bx + C)$$

Parámetros de la función

La gráfica de la función y= A cot (Bx + C) + D, presenta diferentes parámetros. A continuación se realizará una comparación entre la ecuación general y otra en donde varíen cada uno de dichos parámetros:

Amplitud (A):

Este parámetro cambia el tamaño de la función. Si $A > 1$ se amplifica su forma. Si $0<A<1$, se hace más pequeña. Si $A < 0$ entonces se invierte su forma.

La gráfica de la función cotangente tiene amplitud, pero no se puede calcular sus máximos, ni mínimos, debido a que el seno de los ángulos 0°, 180°, 360°..., es cero una división para cero no esta definida.

Frecuencia (B):

Este parámetro modifica el grado de repetición de la función. Si $B > 1$ la función se repite más rápidamente. Si $0 < B < 1$ la función se repite más lentamente.

Ejemplo 1: Graficar las siguientes funciones.

Resolución:

- y = cot (x)

- y = cot (3x)

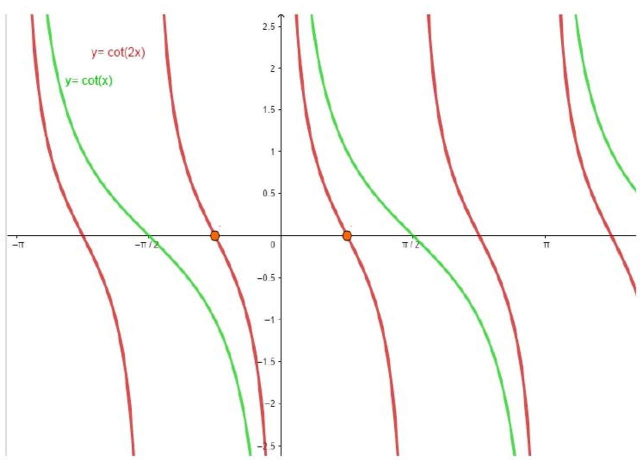


Figura 131. Frecuencia de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

160

Análisis:
En la ecuación $y = \cot x$ se puede observar que la curva se repite una sola vez de cero a π, mientras que en la ecuación $y = \cot 3x$, se observa que la curva se repite tres veces en el mismo periodo.

Desfase horizontal (C):

- Este parámetro determina el desplazamiento horizontal de la función. Un signo (+) en la fase, implica que la función se adelante (o sea, se corre a la izquierda) y un signo (-) en la fase implica que la función se atrase (o sea, se corre a la derecha).

Ejemplo 2: Graficar las siguientes funciones.

Resolución:

$y = \cot x$	$C = 0$	$B = 1$	$C / B = 0$
$y = \cot (x + \pi/4)$	$C = \pi/2$	$B = 1$	$C / B = \pi/4$

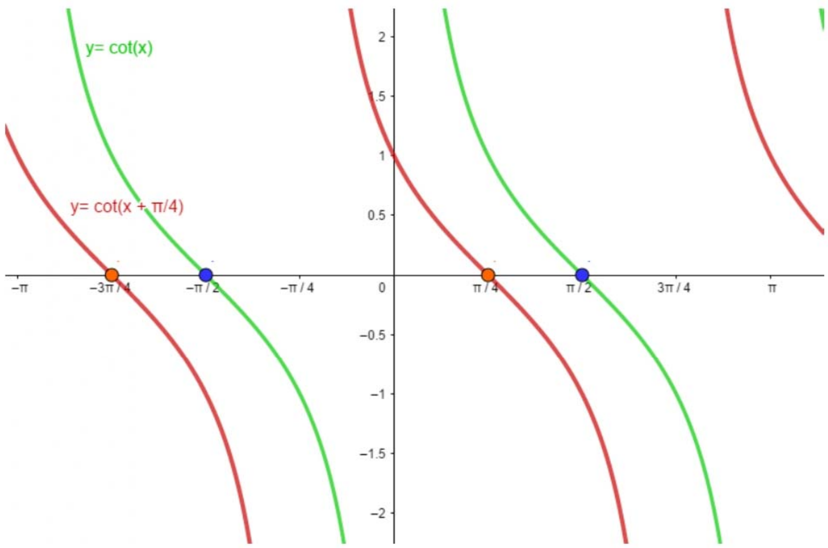


Figura 132. Desfase hacia la izquierda de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la gráfica de la función $y = \cot(x + \pi/4)$ "C" es positivo, por tanto se adelanta, es decir se traslada hacia la izquierda $\pi/4$ unidades de la gráfica de la función $y = \cot x$.

Ejercicios modelos:

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Ejemplo 2.1: Graficar las siguientes funciones.

Resolución:

y = cot (x) **C = 0** **B =1** **C / B = 0**

y = cot (x + π/4) **C = π/4** **B = 1** **C / B = π/4**

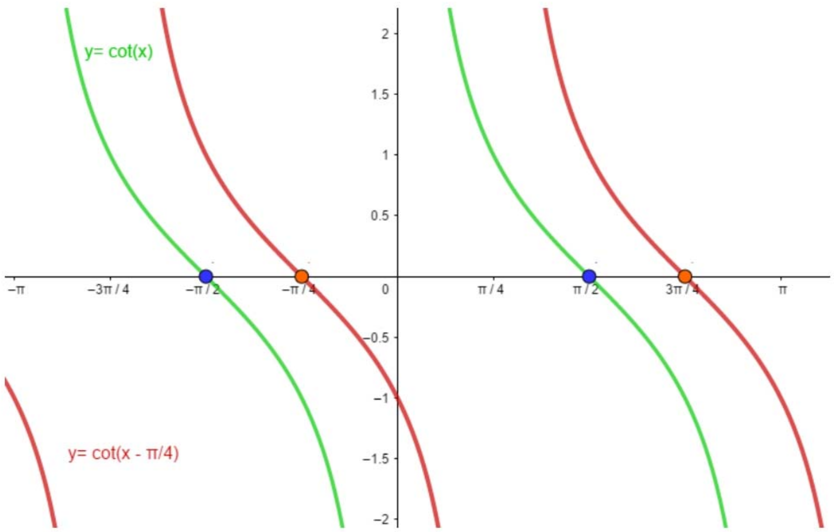


Figura 133. Desfase hacia la derecha de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la gráfica de la función **y = cot(x - π/4)** "C" es negativo, por tanto se atrasa, es decir se traslada hacia la derecha π/4 unidades de la gráfica de la función **y = cot x.**

Desfase vertical (D):

- Si a la función f(x) se le agrega una constante D ésta se desplazará verticalmente; d unidades hacia arriba si su signo es más (+) o se desplazará unidades hacia abajo si su signo es menos (-).

162

Ejercicios modelos: CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Ejemplo 3: Graficar las siguientes funciones.

Resolución:

y = cot (x) **C = 0** **B =1** **C / B = 0**

y = cot (x) + 2 **C = 0** **B = 1** **C / B = 0** **D = 2**

y= cot (x) - 2 **C = 0** **B = 1** **C / B = 0** **D = - 2**

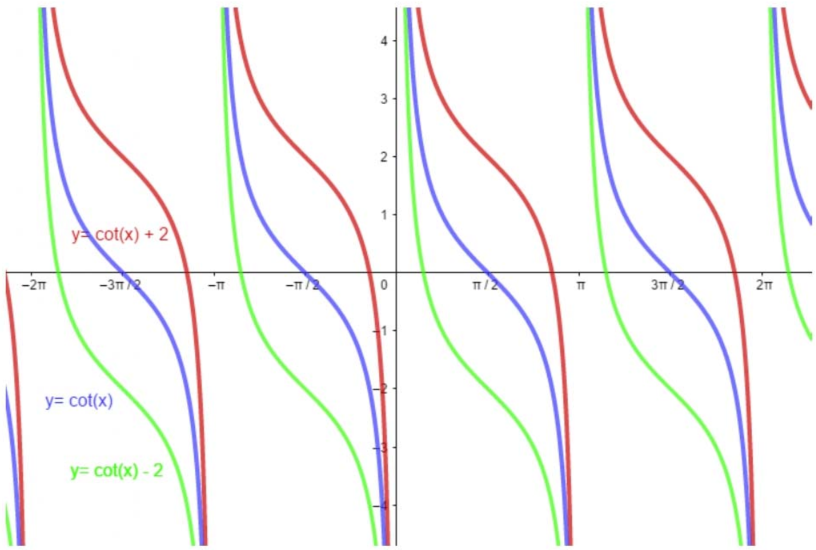


Figura 134. Desfase vertical de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Análisis: en la ecuación **y = cot (x)** se observa que la curva corta cada π/2 en el eje x, debido a que no tiene desplazamiento vertical, mientras que en la ecuación **y = cot (x) + 2** la curva tiene un desplaza hacia arriba 2 unidades, debido a que es igual a 2 y es positivo, y para la ecuación **y = cot (x) - 2** la curva se traslada hacia abajo 2 unidades, debido a que el desplazamiento vertical es igual a -2 y es negativo .

163

Ejercicios modelos:

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

1. Determine la amplitud y el período de la función y= cot (x). Luego construya la gráfica.

Resolución:

Comparando con la ecuación general y = A cot (Bx + C) + D, se puede determinar los valores de cada parámetro, por tanto se tiene:

A = 1 B =1 C = 0 D = 0

- Amplitud: A = 1 — Se reemplaza el valor de la amplitud.
- Período: T= π/B = π/1 — Se reemplaza el valor de b en la expresión de T.
  T= π
- Para hallar los cortes con el eje x utilice la siguiente ecuación:

$x = \pi/2 + n\pi$ con $n \in Z$

Por tanto:

n= -2, $x = \pi/2 + (-2)\pi = -3\pi/2 = -4.71$

n= -1, $x = \pi/2 + (-1)\pi = -\pi/2 = -1.57$

n= 0, $x = \pi/2 + (0)\pi = \pi/2 = 1.57$

n= 1 , $x = \pi/2 + (1)\pi = 3\pi/2 = 4.71$

n= 2, $x = \pi/2 + (2)\pi = 5\pi/2 = 7.85$

- Para hallar el corte con el eje y:

Dado que d= 0, no corta el eje y

- Luego, para realizar el bosquejo de la gráfica de la función y = cot (x), se ubica su periodo que va desde - π hasta π.

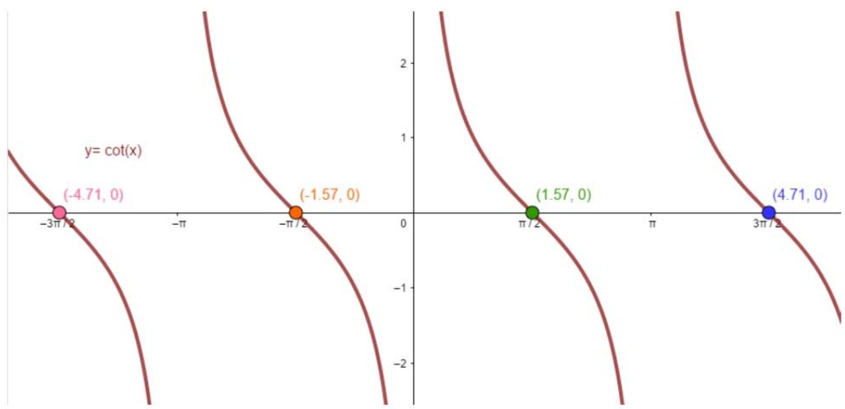


Figura 135. Desfase vertical de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

164

Problema de aplicación:

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Un avión que vuela a 2 millas de altitud se acerca a una estación de radar como muestra la figura 81. Expresar el ángulo de elevación α del avión en función de la separación horizontal x entre el avión y la estación de radar. Analizar los parámetros de la gráfica en el intervalo de $-2\pi < x < 2\pi$.

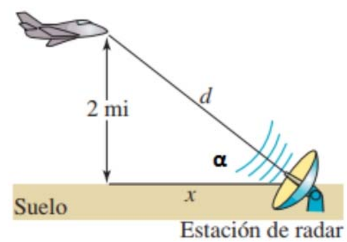


Figura 136. Avión del problema de aplicación. Fuente: Zill, D. (2010). Álgebra, trigonométrica y geometría analítica.

Resolución:

La separación horizontal x y α se relacionan con $\cot \alpha = x/2$. Se aprovecha la función cotangente inversa para dejar en función del ángulo, de donde:

$$\alpha = \cot^{-1}(x / 2)$$

Para analizar los parámetros de la función en el intervalo de $-2\pi < x < 2\pi$, se realiza lo siguiente: Comparando con la ecuación general $y = A \cot(Bx + C) + D$, se puede determinar los valores de cada parámetro, por tanto se tiene:

$A = 1$ $\quad B = 2$ $\quad C = 0$ $\quad D = 0$

• Amplitud: $A = 1$

• Período: $T = \pi/B$

$T = \pi/1/2 = 2\pi$

• Para hallar los cortes con el eje x utilice la siguiente ecuación:

$x = \pi/2 + n\pi$ con $n \in Z$

Por tanto:

Se reemplaza el valor de n en la ecuación.

$n = -1$, $x = (\pi/2 + (-1)\pi) * 2 = (-\pi/2) * 2 = -3.1416$

$n = 0$, $x = (\pi/2 + (0)\pi) * 2 = (\pi/2) * 2 = 3.1416$

$n = 1$, $x = (\pi/2 + (1)\pi) * 2 = (3\pi/2) * 2 = 3\pi$

• Para hallar el corte con el eje y, dado que $D = 0$, no corta el eje y.

Luego, para realizar el bosquejo de la gráfica de la función $y = \cot(2/x)$, se ubica su intervalo que va desde $-2\pi < x < 2\pi$.

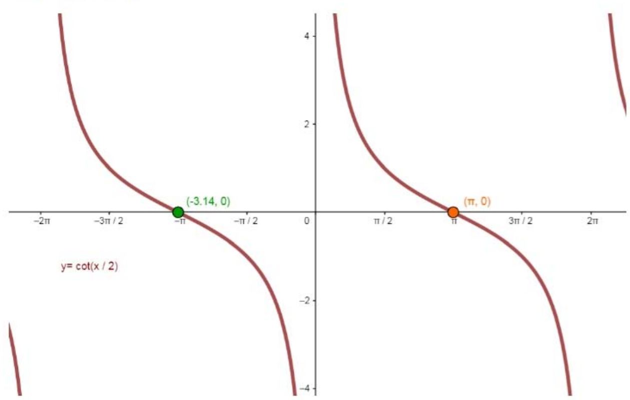


Figura 137. Ejemplo problema de aplicación cotangente. Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

165

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Trabajo grupal: Cuestionario.

PON A PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

1. Responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué es para usted la función cotangente?

La función cotangente es reciproca de la función tangente y sus características y propiedades son similares.

- ¿Cómo se puede representar la función cotangente en el primer y tercer cuadrante?

.Se la puede representar de manera decreciente y con un periodo de π.

- ¿Cuáles son las características que la función cotangente tiene en el intervalo de (0 ; 2π)?

Su periodo es cada π, es una función decreciente, cada π se forman asíntotas, no tiene desplazamientos verticales ni horizontales, tiene una amplitud de 1 pero dada a la naturaleza de la función no se puede calcular ni máximos ni mínimos, su frecuencia es de una unidad.

- ¿Qué semejanzas encuentra con respecto a la gráfica de la función tangente?

Las dos funciones son impares, no tienen ni máximos ni mínimos, el recorrido es el mismo.

2. En la siguiente gráfica análice los parámetros de la función cotangente.

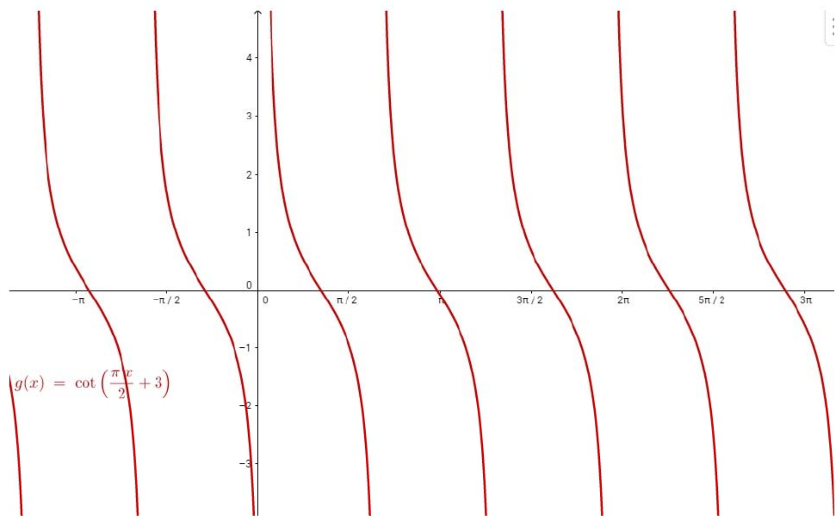


Figura 138. Desfase vertical de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Dominio: R - {π + nπ con n $\in$ Z} . Recorrido: R

Amplitud: 1

Desfase: La función se adelanta 3 unidades.

Frecuencia: $\pi/2$

Período: Cada 2 unidades.

Tipo de función: Impar y decreciente.

166

Dada la función $y = \cot(2x + 3\pi)$, determinar sus parámetros, el período y realice la gráfica.

Resolución:

• Comparando con la ecuación general $y = A \tan(Bx + C) + D$, se puede determinar los valores de cada parámetro, por tanto se tiene:

$A = 1$ $B = 2$ $C = 3\pi$ $D = 0$

• Luego, se determina el período:

$P = \pi / B$

$P = \pi / 2$

• Seguido de esto, determinamos el punto de desplazamiento de fase (Df).

$Df = - C / B$

$Df = - 3\pi / 2$

• Dado que la gráfica de la tangente empieza en $-\pi$ y termina en π, desarrollamos el argumento de la función como una desigualdad.

$- \pi < 2x + 3\pi < \pi$

$- \pi + 3\pi < 2x + 3\pi - 3\pi < \pi + 3\pi$

$2\pi < 2x < 4\pi \quad / 2$

$\pi < x < 2\pi$

Lo que indica que en los puntos π y 2π se formarán asíntotas verticales.

• Para conocer los cortes con el eje x, se procede de la siguiente manera:

$x = n\pi$;

$2x + 3\pi = n\pi$

$2x = n\pi - 3\pi$

$x = \pi(n - 3) / 2$

$n = 4$, $x = \pi(4 - 3) / 2 = \pi/2$

$n = 6$, $x = \pi(6 - 3) / 2 = 3\pi / 2$

$n = 8$, $x = \pi(8 - 3) / 2 = 5\pi/2$

• Para hallar el corte con el eje y, dado que $D = 0$, no corta el eje y.

Luego, para realizar el bosquejo de la gráfica de la función $y = \cot(x + 3\pi)$, se ubica su periódo que va de $- \pi$ hasta π.

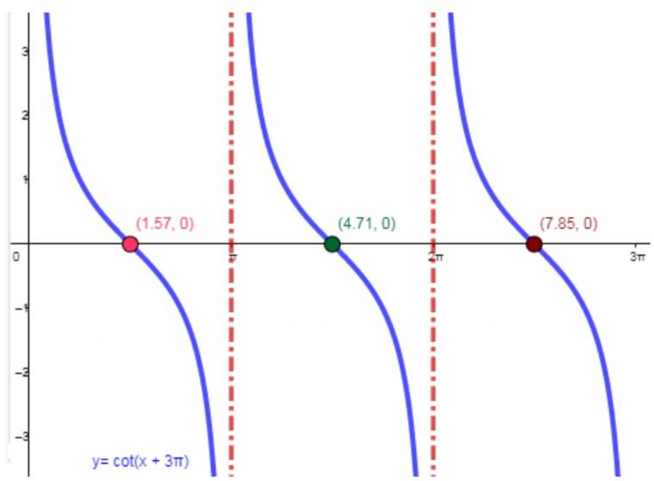


Figura 139. Ejemplo de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

167

ANEXOS

Actividad individual: Hoja de trabajo.

PON A PRUEBA TU CONOCIMIENTO

1. En la siguiente gráfica, identifique las seis líneas trigonométricas en el primer y tercer cuadrante según el ángulo dado:

- Primer cuadrante 60º
- Tercer cuadrante 210º

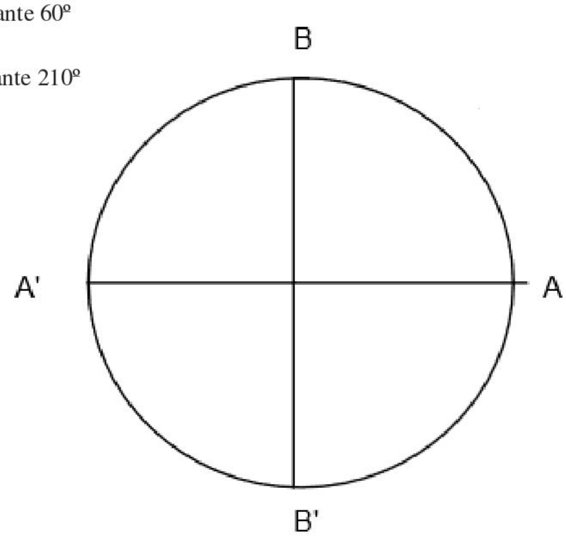


Figura 1. Líneas trigonométricas.
Fuente: Cortés, C. (2010). *MATEMÁTICAYTRENES.*

2. Responda las siguientes preguntas con respecto a las líneas trigonométricas:

- ¿Por qué es importante conocer el sentido de giro que toman las líneas trigonométricas?
  ....
  ....
- ¿Son iguales las longitudes de las líneas trigonométricas para los valores de 45°, 135°, 225° y 315°. Si o no, por qué?
  ....
  ....
- ¿A qué eje es tangente la línea cotangente y la línea tangente?
  ....
  ....

- ¿Qué sucede con la línea del seno en el primer cuadrante?
  ....
  ....
- ¿Qué sucede con la línea tangente en los valores de 90°, 270°, 450°, etc.?
  ....
  ....
  ....
- ¿Qué sucede con la línea cotangente en los valores de 0°, 180°, 360°, etc.?
  ....
  ....
- ¿Por qué se le llama línea secante y cosecante?
  ....
  ....
- ¿Por qué se utiliza la unidad como medida del radio del círculo trigonométrico?
  ....
  ....
- ¿Por qué se utiliza el triángulo rectángulo en las líneas trigonométricas?
  ....
  ....
  ....
- ¿Cuáles son las dos formas de medir ángulos?
  ....

3. Complete la siguiente tabla, de acuerdo a los signos que tienen el seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente en los cuatro cuadrantes.

	I	II	III	IV
Sen				
Cos				
Tan				
Sec				
Cot				
Csc				

Figura 2. Signos de las líneas trigonométricas.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

172

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad individual: Hoja de trabajo.

REFUERZA TU CONOCIMIENTO

1. Complete los espacios:

- La ________ de una curva del seno representa la mitad de la distancia entre los valores máximos y mínimos de dicha función.
- Dada la función y = a sen (bx + c), c / b representa el ___________ _________ de la gráfica de la función.
- Dada la función y = a sen (bx + c) + d, d representa el _________ ________de la gráfica de la función.

2. Complete la siguiente tabla sobre las características de la función y = sen x.

Máximo _ _ _ _ _ _ _ _
Mínimo _ _ _ _ _ _ _ _
Dominio _ _ _ _ _ _ _ _
Rango _ _ _ _ _ _ _ _
Período _ _ _ _ _ _ _ _

3. Con la ayuda de la gráfica de la función seno escriba cual es el valor del seno de los siguientes ángulos.

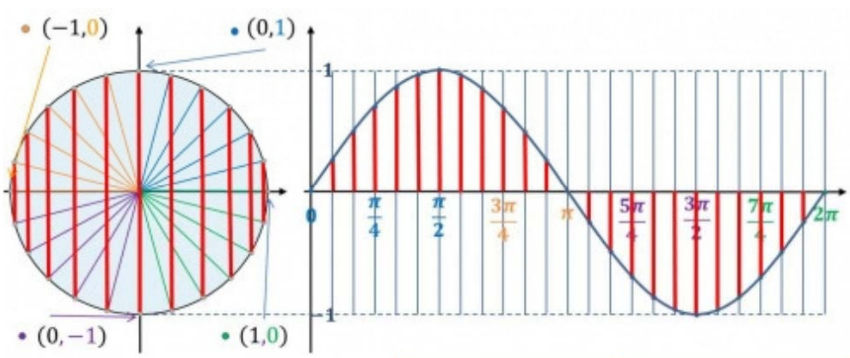


Figura 3. Gráfica de la función seno en el círculo trigonométrico.
Fuente: Gráficas funciones trigonométricas. L2DJ Temas de Matemáticas INC,2011.

sen 0	
sen π/2	
sen π	
sen 3π/2	
sen 2π	

173

4. Escriba la función que represente la siguiente gráfica y determine el recorrido, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos máximos y mínimos. Considere el intervalo [-2π, 2π].

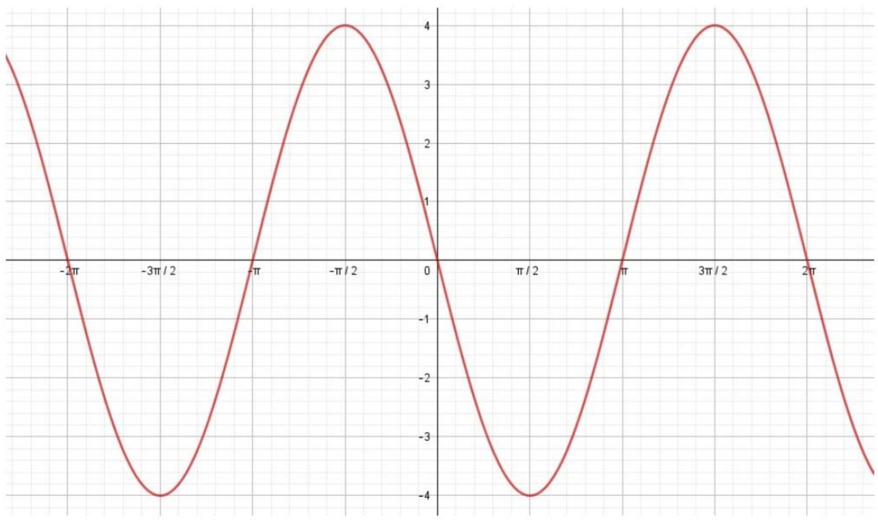


Figura 4. Gráfica de la función seno.
Fuente: Guamán J. & Malán X.

Función: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Dominio: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Rango:_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Periódo: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

174

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad individual: Hoja de trabajo.

REFUERZA TU CONOCIMIENTO

1. ¿Cómo los coeficientes A, B, C y D afectan la función trigonométrica y = A cos (Bx + C) + D?

----

2. Complete los espacios:

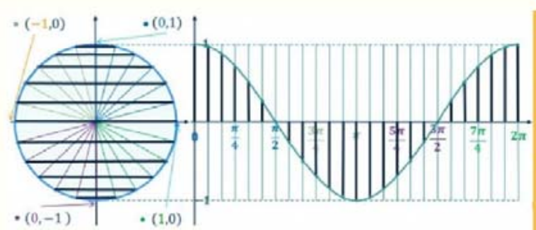
- La curva de la función coseno es simétrica respecto al eje_ _ _ y por tanto es una función _ _ _ _ .

3. Complete la siguiente tabla:

Características de la función coseno

Máximo	____________
Mínimo	____________
Dominio	____________
Rango	____________
Periodo	____________

4. Con la ayuda de la gráfica de la función coseno escriba cual es el valor del coseno de los siguientes ángulos.



cos 0	
cos π/2	
cos π	
cos 3π/2	
cos 2π	

Figura 5. Gráfica de la función coseno en el círculo trigonométrico.
Fuente: Gráficas funciones trigonométricas. L2DJ Temas de Matemáticas INC,2011

175

5. Realice las gráficas de las siguientes funciones.

- y = 1/3 cos x
- y = 4 cos (x/2)
- y =2/3 cos (x/2 -π/4)

6. Observe las gráficas de las siguientes funciones y conteste.

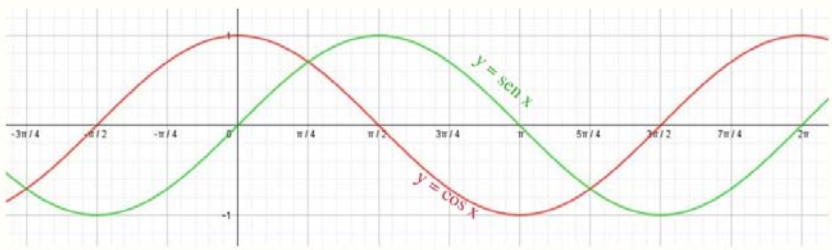


Figura 6. Gráfica de las funciones seno y coseno.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

- ¿ En qué intervalos las dos funciones son crecientes a la vez?

....

....

- ¿ En qué intervalos las dos funciones son decrecientes a la vez?

....

....

- ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de corte entre las dos funciones?

....

....

176

- Mapa mental, de la actividad pág. 103.

Figura 7. Esquema mental de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

177

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad grupal: Cuestionario.

REFUERZA TU CONOCIMIENTO

1. Conteste las siguientes preguntas:

¿Cuando una línea es tangente al círculo trigonométrico?

____

____

¿Por qué se forman asíntotas en la gráfica de la función tangente?

____

____

2. Complete los siguientes características de la función tangente.

Dominio: _____________________________

Período: _______________________

Rango: _______________________

Tipo de función : ________________

3. Gráficar la función tangente para el valor de 0° a 180°, haciendo variar al ángulo de 30° en 30°.

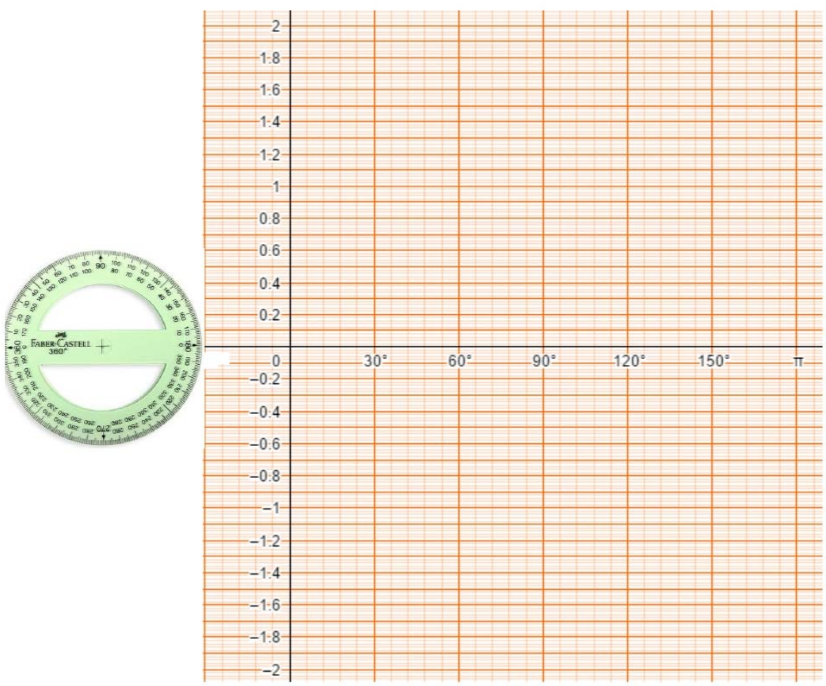


Figura 8. Ejemplo de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

179

4. En la siguiente gráfica de la función tangente análice los parámetros establecidos.

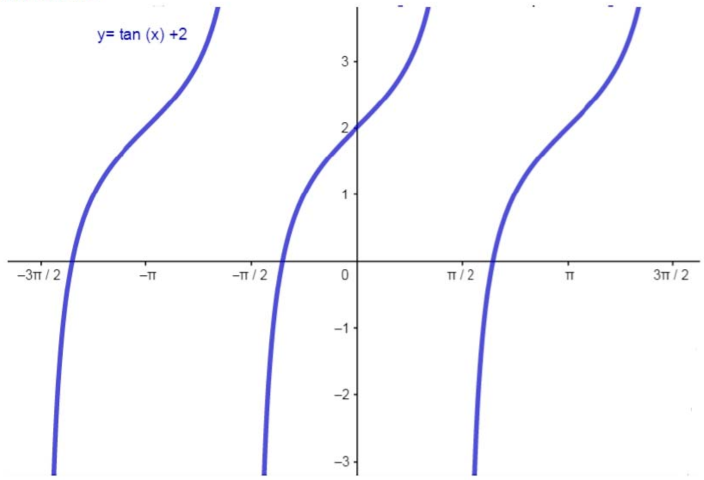


Figura 9. Ejemplo de la gráfica de la función tangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Amplitud: ....

Desfase horizontal: ....

Frecuencia: ....

Período: ....

Tipo de función: ....

Desplazamiento: ....

5. Dada la siguiente función y= tan(x + 2), construya su gráfica.

180

CONSOLIDACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Actividad individual: Hoja de trabajo.

REFUERZA TU CONOCIMIENTO

1. Conteste las siguientes preguntas.

¿La función cosecante es periódica?

¿La función es par o impar?

¿La función presenta cortes con el eje x ?

----

2. Seleccione la función que corresponde a la siguente gráfica.

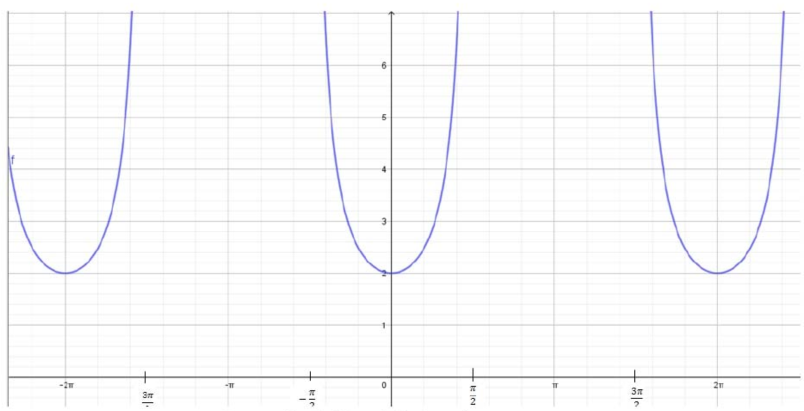


Figura 10. Gráfica de la función cosecante.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

y = 2 csc (x + π / 2) ☐

y = 2 csc (x - π / 2) ☐

y = 1/2 csc (x + π / 2) ☐

3. Realizar la gráfica de las siguientes funciones.

- y = csc (2x-π)
- y = 3 csc (x /2)
- y = 2 csc (x+π/4)

181

Actividad individual: Hoja de trabajo.

REFUERZA TU CONOCIMIENTO

1. Complete los espacios:

- La gráfica de la función secante tiene asíntotas __________
- El período de y = sec x es ________
- El dominio de la función secante son los múltiplos de ___, es decir _______________
- La gráfica de la función secante es _______ , por lo que tiene simetría respecto al eje _________

2. La siguiente figura muestra dos traslaciones de la función y = sec x. Escriba la ecuación de la función que corresponde a cada una de las gráficas.

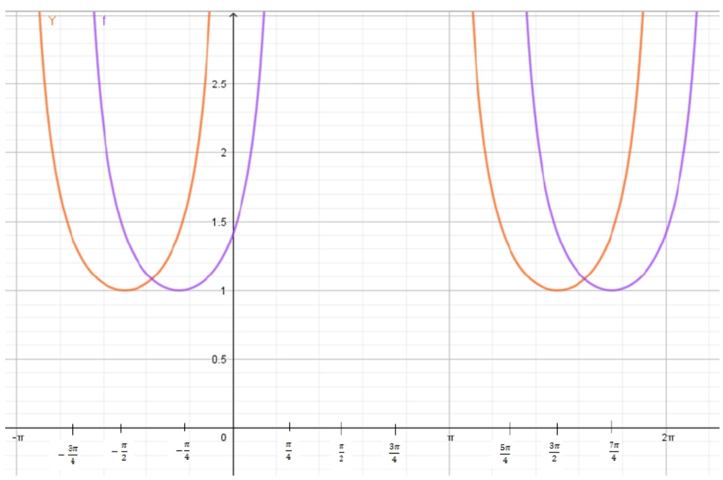


Figura 11. Traslación de función secante.
Fuente: Guamán J. & Malán X.

y = _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

y = _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

3. Realice las gráficas de las siguientes funciones obteniendo cada uno de los parámetros estudiados.

- y = 1/4 sec (x)
- y = 1/2 sec(πx)
- y = 2 sec (x+π)

Trabajo grupal: Cuestionario.

PON A PRUEBA TUS CONOCIMIENTOS

1. Responda las siguientes preguntas:

¿Qué es para usted la función cotangente?

....

....

¿Cómo se puede representar la función cotangente en el primer y tercer cuadrante?

....

....

¿Cuáles son las características que la función cotangente tiene en el intervalo de $[0\,;\,2\pi\,)$

....

....

¿Qué semejanzas encuentra con respecto a la gráfica de la función tangente?

....

2. En la siguiente gráfica análice los parámetros de la función cotangente.

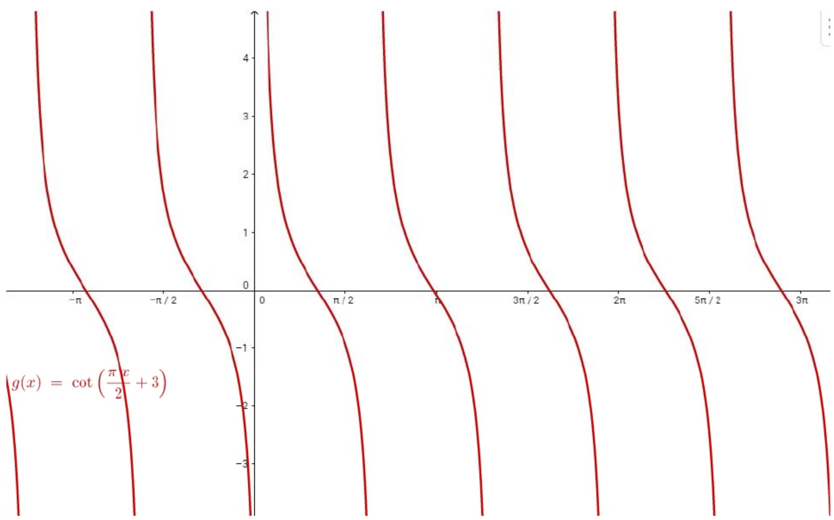


Figura 12. Desfase vertical de la función cotangente.
Fuente: Guamán, J. & Malán, X.

Dominio: ....

Recorrido: ....

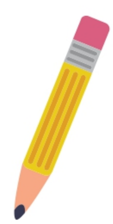
Amplitud: ....

Desfase: ....

Frecuencia: ....

Período: ....

Tipo de función : ....



3. Dada la función y = cot (π/2x + 3), determinar sus parámetros, el período y realice la gráfica.

Resolución:

Comparando con la ecuación general y = cot (Bx + C), se puede determinar los valores de cada parámetro, por tanto se tiene:

A = ___ B =____ C = ____

TEXTO DE CONSULTA:

Alarcón, S., & Suescún, C., & de la Torre, A. (2005). El método de las tangentes de Fermat. Matemáticas: Enseñanza Universitaria, XIII (2), 101-123.

Araya Chacón, A., & Monge Sánchez, A., & Morales Quirós, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 7 (2), 0.

Centos proyect. (2019). Funciones trigonométricas. Tomado de: http://cimanet.uoc.edu /cursMates0/IniciacionMatematicas/pdf/C%2025Las%20funciones%20trigonometricas.pdf.

Larson, R., Falvo, D., Hernández, J., López, E. & Robles, M. (2011). México. Cengage Learning.

Pérez, F. (2017). Circulo unitario y funciones trigonométricas. Universidad de Antioquia. Matemáticas Grado 10º. Tomado de: https://www.academia.edu/30171329/Circulo_unitario _y_funciones_trigonometrica.

Universidad Nacional de San Luis. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales. (2012). Líneas trigonométricas. Tomado de: http://webfcfmyn.unsl.edu.ar/wp-content/uploads/2012/05/cap5+prac-parte2.pdf.

Universidad Nacional de la Plata. (2014). Curso de nivelación. Módulo 5: Trigonometría. Tomado de: http://fcaglp.unlp.edu.ar/area-docente/Ingreso-2014/Modulos-2014/Modulo_5-TRIGONOMETRIA.pdf.

Zill, G., & Dewar, M. (2010). Trigonometría. Gráfica de las funciones trigonométricas. Colombia. Editora Liliana Ortiz. ISBN 978-958-41-0415-1.

Líneas y gráficas de las funciones trigonométricas: Guía para el docente.

Jenny Carmen Guamán Coraisaca
Ximena Aracely Malán Saravia

La presente guía comprende los temas de líneas y gráficas de las funciones trigonométricas. La misma, está estructurada en siete clases, cada una de ellas divididas en tres momentos que son: anticipación, construcción y consolidación del conocimiento. Las actividades propuestas son de carácter constructivistas, los ejemplos y ejercicios son aplicados al análisis de la fundamentación teórica de cada tema y a ejemplos contextualizados. Además, se plantea el uso de tableros para la construcción de las líneas y gráficas de la función seno, coseno y tangente, mientras que para las funciones cosecante, secante y cotangente, se trabajará en el bosquejo de sus respectivas gráficas en papel milimetrado. Cada clase tiene su respectivo cuestionario y hoja de refuerzo, los cuales se desarrollarán de forma individual o grupal.

Este documento constituye un apoyo para el docente que impartirá mencionados temas.

Universidad de Cuenca
Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación
Carrera de Matemáticas y Física

188

3.3. VALIDACIÓN DE LA PROPUESTA

3.3.1. FICHA DE VALIDACIÓN DE LA GUÍA DIDÁCTICA

TÍTULO DEL TRABAJO:	
"ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS Y RECURSOS APLICADOS A LAS LÍNEAS Y GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA LOS DOCENTES DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA"	
Estudiantes:	
C.I. 0107339889	**Nombre:** Jenny Carmen Guamán Coraisaca
C.I. 0604884577	**Nombre:** Ximena Aracely Malán Saravia

Nombre del experto:	RUTH CORONEL, TATIANA QUEZADA, XAVIER GABRIEL
Cargo:	DOCENTES

Se solicita calificar el documento con la siguiente escala:

Excelente	Muy bien	Bien	Deficiente
4	3	2	1

RECURSOS	INDICADOR	VALORACIÓN			
		1	2	3	4
Guía didáctica	El documento está organizado y resulta de fácil manejo para el docente.				X
	Existe la presencia de recursos didácticos innovadores.			X	
	Los contenidos, ejercicios y problemas propuestos son pertinentes y contextualizados.		X		
	Las ilustraciones y los textos motivan a comprender el tema propuesto.			X	
	Existen elementos de evaluación útiles para el docente.		X		
Tablero de líneas trigonométricas	La presentación de las líneas y gráficas trigonométricas es agradable y acorde a las necesidades de los estudiantes.				X
	Se puede visualizar la aplicabilidad de los contenidos.				X
	El recurso favorece a un aprendizaje grupal y colaborativo.				X
	El material despierta el interés y curiosidad para su manipulación.				X
Tablero de las gráficas de las funciones seno y coseno	La presentación de las funciones seno y coseno es agradable y acorde a las necesidades de los estudiantes.				X
	Cuenta con una presentación en forma de reto o de juego que invitan a trabajar con ellos.				X
	El recurso ayuda a construir un razonamiento lógico.				X
	Se visualizan las propiedades más importantes de las funciones seno y coseno				X
	El material provoca el diálogo entre el educador y el estudiante.				X
Tablero de función tangente	La presentación de la función tangente es agradable y acorde a las necesidades de los estudiantes.				X
	Se puede visualizar la aplicabilidad de los contenidos.				X
	El recurso favorece a un aprendizaje grupal y colaborativo.				X
	El material despierta el interés y curiosidad para su manipulación.				X

Propuesta	Encuentra a la propuesta aplicable en la carrera de Matemáticas y Física				X

OBSERVACIONES:

Cada guía con su formato para la evaluación del docente, agregar adicionales como "Sabías que", "para recordar" y motivaciones. Añadir ejercicios contextualizados junto con aplicaciones

Nombre: Ruth Coronel

Firma:

Cuença, 08 de FEBRERO del 2019

XAVIER GONZALEZ

Tatiana Quezada

CONCLUSIONES

De acuerdo a la investigación efectuada, se puede manifestar que el proceso de enseñanza-aprendizaje busca que el docente utilice diversas metodologías, estrategias y técnicas, con el fin de desarrollar las habilidades y destrezas de los estudiantes. Por tal razón, existen varios recursos didácticos, y uno de estos es la guía, que le permite al educador poseer una herramienta que le puede ayudar a mejorar la forma de impartir clases, las cuales son previamente planificadas, desde un enfoque constructivista, en el que el educando sea participe en la formación de su conocimiento pero con la orientación del docente.

Es así que la información obtenida evidencia algunos problemas existentes, los más relevantes son: en primer lugar, las metodologías empleadas por el docente, se inclinaban al tradicionalismo, en segundo lugar, no se empleó material concreto en el tema de las líneas y gráficas trigonométricas, dificultando el aprendizaje. Por tal motivo se elaboraron tres tableros para la construcción de las líneas y gráficas de las funciones trigonométricas, para que los alumnos divididos en grupos lo manipulen y de esta manera puedan mejorar su comprensión y asimilación del tema presentado, por medio de un trabajo cooperativo y de este modo al ser partícipes activos se sientan motivados por aprender. En último y tercer lugar no existe bibliografía que explique cómo se construyen las gráficas de las funciones trigonométricas a partir del círculo unitario y determinar sus características particulares, un factor determinante y clave porque los estudiantes no poseen información relevante alguna para consultar.

Anudado a esto, la guía y recursos didácticos elaborados en este trabajo de titulación son un complemento, para que el docente de la carrera a través de la cual puede guiar y organizar las actividades acorde a las necesidades del tema a tratarse con una secuencia de actividades no encontradas en la bibliografía general y lograr que el educando cree un lazo entre la teoría y práctica, desde un enfoque constructivista.

RECOMENDACIONES

Es relevante que se emplee los recursos metodológicos presentados y se utilice adecuadamente el material didáctico con el único fin de disminuir la abstracción que presenta la asignatura y pueda relacionarla con temas posteriores, despertando el interés del educando sobre la Trigonometría en general.

Un adecuado complemento para este trabajo sería el estudio de los conocimientos previos de todos los elementos que se requiere en el tema de gráficas trigonométricas y concienciar al estudiante sobre la importancia del mismo dentro de la matemática.

Otro trabajo que se podría realizar sería que se estudie a profundidad sobre cómo contextualizar problemas de un determinado tema a través de aplicaciones que aporten a la abstracción de las gráficas trigonométricas y puedan a través de estas asociar de manera general o individual según el interés de cada estudiante.

Otro elemento a ser desarrollado fuera realizar una investigación a partir de los resultados obtenidos al trabajar con estrategias metodologías guiadas y generadas, con respecto a los obtenidos con el método tradicionalista, a través de tablas comparativas para enfatizar acerca de los factores que faltan ser estudiadas y profundizadas en el proceso de enseñanza.

BIBLIOGRAFÍA:

Araya, V., Alfaro, M., & Andonegui, M. (2007). CONSTRUCTIVISMO: ORIGENES Y PERSPECTIVAS. *Laurus, 13*(24), 76-92.

Blanco, C., Cabrera, A., Gaete, T., & Pinilla, J. (2010). La evolución del constructivismo (desde una perspectiva constructivista). Revista MAD, (23), 43-54.

Díaz, F., & Hernández, A. (1999). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista México. McGraw-Hill.

González, J., & Parra, R. (2011). El Constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. Revista Electrónica De Investigación Educativa, 13(1), 1-27.

Gasco Txabarri, J; (2016). El empleo de estrategias en el aprendizaje de las Matemáticas en Enseñanza Secundaria Obligatoria. *Revista de Investigación Educativa,* 34() 487-502. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=283346043013.

Giuseppe Néceri, I. (1985). Hacia una didáctica general dinámica. *Métodos y técnicas de enseñanza*. Buenos Aires-Argentina. Editorial Kapelusz S.A. Tercera edición.

Gutiérrez, O. (2003). Enfoques y modelos educativos centrados en el aprendizaje. *Métodos y estrategias para favorecer el aprendizaje en las instituciones de educación superior.* Recuperado de: https://www.guao.org/sites/default/files/portafolio%20docente/Enfoques%20y%20 modelos%20educativos%20centrados%20en%20el%20aprendizaje.pdf.

Latorre, M., & Seco del Pozo, C. (2013). UNIVERSIDAD “MARCELINO CHAMPAGNAT”. *Metodología. Estrategias y técnicas metodológicas*. Santiago de Surco–LIMA. Visionpcperu editorial.

Moreira, M. (1993). A Teoría da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Fascículos de CIEF Universidad de Río Grande do Sul Sao Paulo.

Moreno, I. (2004). La utilización de medios y recursos didácticos en el aula. Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de: https://webs.ucm.es/info/doe/profe/isidro/merecur.pdf.

Ogalde, I., & Bardavid, E. (1992). Los materiales didácticos. Medios y recursos de apoyo a la docencia. México. Editorial TRILLAS.

Ramírez, R., & Pérez, Y. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. *Fundamentos teóricos y metodológicos*. Revista de Investigación, 35() 169-193. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=376140388008.

Reyes Barcos, M. (2003). Las Estrategias Creativas como factor de cambio en la actitud del docente para la enseñanza de la matemática. Sapiens. Revista Universitaria de Investigación. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41040204 Rodríguez, M. (2004). Centro de educación a distancia (C.E.A.D.)/Pedro Suárez Hdez. *La teoría del aprendizaje significativo.* C.P. nº 38009.Santa Cruz de Tenerife.

Sánchez, J., Ruiz, J., & Sánchez, E. (2016). Las clases invertidas: beneficios y estrategias para su puesta en práctica en la educación superior. Universidad autónoma de Madrid. Tomado de: https://www.uam.es/gruposinv/dim/assets/jose-uned-14.pdf.

Torp, L., & Sage, S. (1998). Aprendizaje Basado en Problemas. Buenos Aires. Amorrortu Editorial.

Tünnermann Bernheim, C. (2011). El constructivismo y el aprendizaje de los estudiantes. Universidades, (48), 21-32.

Valderrama, N. (2013). Construcción de las funciones trigonométricas haciendo un contraste entre la utilización y ausencia de TIC´s. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá - Colombia.

ANEXOS:

ENCUESTA

UNIVERSIDAD DE CUENCA

La siguiente encuesta tiene como propósito conocer cómo se desarrolló el proceso de enseñanza referente al tema de las líneas y gráficas trigonométricas. La información que requiere servirá de base para la elaboración de una guía didáctica.
Solicitamos su colaboración para completar esta encuesta y llene todas las preguntas con información fidedigna la cual será de absoluta confidencialidad y se usará con fines educativos. Tiene una duración aproximada de 5 mín.
Marque con una X la opción que crea conveniente.

1. En su opinión, ¿la motivación es importante en el proceso de enseñanza?

☐ SI ☐ NO

Si su respuesta es sí, arguméntela.

____

2. ¿El docente relacionó los contenidos del tema de líneas y gráficas trigonométricas con aplicaciones cotidianas?

Nunca	
A veces	
Casi siempre	
Siempre	

3. Cuando usted tomó los contenidos de líneas y gráficas trigonométricas, ¿cómo fue impartida?

Teórica	
Más teórica que práctica	
Más práctica que teórica	
Práctica	

4. Cree usted que el uso de diferentes metodologías (clase invertida, lluvia de ideas, videos, etc.) mejoraría su comprensión sobre la materia de trigonometría.

Definitivamente si	
Probablemente si	
Probablemente no	
Definitivamente no	

5. El empleo de recursos didácticos en la enseñanza de las líneas y gráficas trigonométricas es:

Indispensable	
Sumamente importante	
Medianamente importante	

Poco importante	
No necesario	

6. ¿Cree usted la enseñanza de las líneas y gráficas trigonométricas a través del pizarrón fue significativa?

En la escala de 0 a 5, donde 0 significa nada significativa y 5 muy significativa.						
Nada significativa	1	2	3	4	5	Muy significativa

7. ¿Piensa usted que las actividades desarrolladas por el docente en clases, contribuyeron a alcanzar una excelente compresión del tema de líneas y gráficas trigonométricas?

De acuerdo	
En desacuerdo	

8. ¿Qué aspectos se desarrollaron en el proceso de enseñanza de las líneas y gráficas trigonométricas?

Considere que el constructivismo el estudiante forma su propio conocimiento

Tradicional	1	2	3	4	5	Constructivista
Emplea un solo método de enseñanza y fue rutinario.						Emplea varios métodos de enseñanza.
Participación pasiva de los estudiantes.						Participación activa de los estudiantes de manera voluntaria.
.Los estudiantes deben seguir al pie de la letra lo enseñado.						Los alumnos pueden cuestionarse.
Uso único del pizarrón.						Uso permanente de diferentes recursos didácticos.

9. ¿Cómo califica usted su conocimiento sobre líneas y gráficas trigonométricas?

Excelente ( )
Bueno ( )
Malo ( )

ENTREVISTA

¿De qué manera motiva usted a sus alumnos?

¿Qué importancia considera usted que tienen los recursos didácticos en la enseñanza?

¿Cuál o cuáles fueron los métodos de enseñanza que utilizó al impartir sus clases?

¿Cuál ha sido la mayor dificultad que encontró al impartir la materia de trigonometría?

¿Qué material utiliza con mayor frecuencia en sus clases?

¿Considera usted que la materia de trigonometría genera cierta dificultad en el aprendizaje de los estudiantes?